ICEx-UFMG
Departmento de Matemáticas

Análise Complexa

2020

Notas por
Bruno de Oliveira
Igor Soares
Pedro Brunialti
Victor Janeiro

Professor
Pablo D. Carrasco

13 de novembro de 2021

Prefacio

Estas notas foram preparadas para o curso de Análise Complexa do 2020/2 (Mestrado) na UFMG. Os estudantes transcriberam e melhoraram umas notas manuscritas que foram providenciadas, e no final eu (Pablo) fiz uma revisão do material. Naturalmente, qualquer erro que tenha nelas é minha responsabilidade.

O curso tem como bibliografía básica [1],[2] e [3].

A parte de geometría hiperbólica (por exemplo, o teorema de uniformização) encontra-se em notas aparte.

Conteúdo

1 Introdução **1**
- 1.1 Análise Complexa . . . 1
- 1.2 Aspeito algébrico . . . 1
- 1.3 Aspeito analítico . . . 2
  - 1.3.1 Funções harmônicas . . . 3
  - 1.3.2 Teoría Analítica de Números . . . 3
- 1.4 Aspeito geomêtrico . . . 5
  - 1.4.1 Subconjuntos simplesmente conexos do plano . . . 5
  - 1.4.2 Geometría hiperbólica . . . 5
  - 1.4.3 Curvas algébricas . . . 6

2 Funções Holomorfas **7**
- 2.1 Funções Diferenciáveis . . . 7
- 2.2 A Álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . . . 10
- 2.3 Funções Holomorfas . . . 13

3 Integração **17**
- 3.1 Formas Diferenciais . . . 17
  - 3.1.1 1-Formas . . . 18
  - 3.1.2 2-Formas . . . 19
- 3.2 Integração de 1-Formas . . . 21
- 3.3 Operador de Hodge . . . 23
- 3.4 Integral de 2-formas . . . 24

4 Funções Analíticas **27**
- 4.1 Potênciais Holomorfos . . . 27
  - 4.1.1 Funções harmônicas . . . 29
- 4.2 Teorema de Cauchy . . . 30
  - 4.2.1 Fórmula de Cauchy . . . 33
- 4.3 Funções Analíticas . . . 35
  - 4.3.1 Derivadas de Séries de Potência . . . 39
  - 4.3.2 Funções Analíticas . . . 41
  - 4.3.3 Aplicações . . . 44

5 A Estrutura das Funções Holomorfas **46**
- 5.1 Zeros de Funções Holomorfas . . . 46
  - 5.1.1 Logaritmo e Raízes . . . 47
  - 5.1.2 Forma Local de Funções Holomorfas . . . 48

5.2 Singularidades . . . 49
5.2.1 Extensão ao $\hat{\mathbb{C}}$ . . . 51
5.3 A Estrutura Algébrica das Funções Holomorfas . . . 52
5.4 Singularidades Essenciais . . . 57
5.5 O Teorema de Cauchy . . . 58
5.6 Séries de Laurent . . . 60
5.7 Teoria dos Resíduos . . . 61
5.7.1 Princípio do Argumento . . . 63
5.8 Calculo de integrais reais . . . 65
5.8.1 Integral de funções periódicas sobre seu período. . . . 68
5.8.2 Valor principal de integrais . . . 69
5.8.3 Integrais de funções racionais . . . 70
5.8.4 Integrais com singularidades . . . 71
5.8.5 Outras integrais . . . 72
5.8.6 Integrais de raízes e logaritmos: pontos de ramificação. . . . 73
5.9 Convergência de Funções Holomorfas . . . 75
5.9.1 Convergência Uniforme em Compactos . . . 75
5.9.2 Famílias Normais . . . 78

6 Geometria Hiperbólica **80**
6.1 Transformações de Möbius . . . 80
6.1.1 Representação do grupo de transformações de Möbius . . . 81
6.1.2 O grupo especial projetivo real . . . 82
6.2 Propriedades geométricas das transformações de Möbius . . . 83
6.3 Automorfismos do Disco e do Plano Hiperbóico . . . 85

7 Funções harmônicas **88**
7.1 Representação integral . . . 88
7.2 O problema de Dirichlet . . . 90
7.3 A propriedade do valor médio . . . 91
7.4 Funções supharmônicas . . . 92

Bibliografía **94**

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo serve apenas para introduzir alguns dos temas que estudaremos, sem muita formalidade, e sem fazer definições precisas. Para isso será o curso.

Se o leitor encontra o material confuso, recomendo começar diretamente pelo segundo capítulo e voltar depois de estudar as partes básicas do curso. Por outra parte, o curso assume familiaridade com um curso básico em variável complexa a nível de graduação.

1.1 Análise Complexa

O estudo dos subconjuntos do plano $\mathbb{C}$ e as funções definidas neles tem vários aspeitos, todos interrelacionados. Entre eles

- algébricos
- analíticos
- geométricos
- dinâmicos

Vejamos alguns exemplos.

1.2 Aspeito algébrico

O polinômio $p(x) = x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ é irreduzível (pois não tem zeros em $\mathbb{R}$). Por tanto,

$$\mathbb{C} := \frac{\mathbb{R}[x]}{(p(x))}$$

é uma extensão de corpos de $\mathbb{R}$. Dado $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ podemos escrever-lho como

$$f(x) = g(x) \cdot p(x) + (a + bx)$$

e por tanto sua classe em $\mathbb{C}$ é $[f(x)] = [a + bx] := a + b \cdot i$, onde $i = [x]$. Como $p(x)$ é irreduzível, $\{1, i\}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, e por tanto, como $\mathbb{R}$ espaços vetoriais, $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Por outro lado, é fácil verificar (utilizando que $i^2 = -1$), que o produto é dado por

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Como extensão de corpo, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$, é dizer, apenas adicionamos a raiz i do $p(x)$. Porém, um fato central na álgebra é que na verdade adicionamos todas os zeros dos polinômios em $\mathbb{R}$, e ainda mais, de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Teorema 1. *$\mathbb{C}$ é algebricamente fechado: se $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ tem grau ≥ 1 então $f(x)$ tem um zero em $\mathbb{C}$.*

O teorema anterior é simples de provar com análise complexa, mas bem complicado de demostrar utilizando apenas métodos algébricos.

1.3 Aspeito analítico

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio (:=aberto, conexo), e $f = u + vi : U \to \mathbb{C}$. Possivelmente o teorema mais importante em análise complexa é o seguinte.

Teorema 2. *As condições $1, \cdots, 6$ abaixo são equivalentes.*

1. *f é holomorfa em U: para todo $z \in U$ existe $f'(z)$.*
2. *f é analítica em U: para todo $z \in U$ existem $r_z > 0$ e $\{a_n\}_n \subset \mathbb{C}$ tais que*

$$|w - z| < r_z \Rightarrow f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z)^n.$$

3. *u, v são classe $\mathcal{C}^1$ e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em U,*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

4. *Se $U' \subset U$ é simplesmente conexo, então existe $F : U \to \mathbb{C}$ holomorfa com*

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in U.$$

5. *f é continua em U e para toda curva fechada γ em U, diferenciável por partes, temos*

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

6. *Se $\overline{D}(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\} \subset U$, então para todo z com $|z - a| < r$ temos*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dz \quad \gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_r(\theta) = a + re^{i\theta}.$$

A primeira parte de nosso curso é dedicada a estabelecer este teorema, algumas generalizações e aplicações.

1.3.1 Funções harmônicas

Dado $U \subset \mathbb{R}^2$ domínio aberto, e $u : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, dizemos que u é harmônica se é solução da equação de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em U. Para uma função $f = u + iv : U \to \mathbb{R}^2$ podemos extender naturalmente esta noção, é declarar que f é harmônica se u e v são.

Un fato fundamental do análise é que se f é holomorfa, então f é harmônica. Perceba, por outro lado, que o fato de f ser holomorfa é mais forte pois suas componentes u e v tem que satisfazer certas relações (as equações de Cauchy-Riemann).

Como uma forma de recíproco, temos que se $u : U \to \mathbb{R}$ é harmônica e $\overline{D}(a, r) \subset U$, então existe $f : D(a, r) \to \mathbb{C}$ holomorfa que satisfaz $\Re(f) = u|D(a, r)$. Este fato nos permite utilizar a teoría de funções holomorfas para estudar funções harmônicas

Exemplo 1. Seja $u : D(0, R) \to \mathbb{R}$ harmônica, $z \in D(0, R)$, então para todo $|z| < r < R$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \underbrace{\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}}_{kernel\ de\ Poisson} d\theta$$

1.3.2 Teoría Analítica de Números

Dado $x \in \mathbb{R}$ consideramos

$$\pi(x) := \#\{p \text{ primo} : p \leq n\} \ (= \sum_{p \leq x} p).$$

A famoso teorema do número primo fala o seguinte.

Teorema 3 (TNP)**.**

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1.$$

Existem várias demostrações deste teorema (algumas incluso atuais), mas uma que é particularmente reveladora segue a seguinte línha. Consideramos a *função zeta de Riemann*,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s = \sigma + it.$$

Por um cálculo direto verificamos que ζ é analítica para $\sigma > 1$.

Observação. Se $s = \sigma$ real,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} > \int_0^N \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1}(N^{s-1} - 1) > \frac{1}{1-s}$$

$$\Rightarrow \zeta(s) > \frac{1}{s-1} \therefore \lim_{s \to 1+} \zeta(s) = \infty.$$

Temos o seguinte resultado devido ao Eüler.

Teorema 4.

$$\zeta(s) = \prod_{p \ primo} \frac{1}{1-p^s}.$$

Segue-se em particular que ζ não tem zeros se $\sigma > 1$. O Eüler considerou apenas valores $s \in \mathbb{R}$: foi o Riemann quem entendeu a importância de considerar ζ para valores complexos, e como esto daría uma prova do TNP. Por outra parte, Riemann não conseguiu completar a prova, o qual foi feito tempo depois pelo de La Vallée Poussin.

Antes deles, o Chebycheff (utilizando ingeniosamente o método das somas parciais do Abel) tinha demostrado que

$$TNP \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$$

onde $\Lambda(n)$ é a função de van Mangoldt,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Chebycheff também demostrou que $\psi(x) = O(x)$, porém não conseguiu calcular o limite.

Breve ideia da prova do TNP. O primeiro que se faz é estabeler que $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ pode se extender de forma análitica ao plano $\Re(s) > 0$. Isto implica que $\zeta(s)$ é meromorfa neste plano, com um polo simples em $s = 1$ de resíduo

$$Res(\zeta, 1) = 1.$$

Depois se demostra que ζ de fato não tem zeros na línha $\Re(s) = 1$, e por tanto

$$\frac{\zeta'}{\zeta} \quad \text{é analítica no conjunto } \{s : Re(s) \geq 1, s \neq 1\}.$$

Com isto de deduz que $s = 1$ é um polo simples de $\frac{\zeta'}{\zeta}$, com $Res(\frac{\zeta'}{\zeta}, 1) = 1$. Utilizando novamente somas de Abel, pode se calcular que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \phi(t)t^{-s-1}dt,$$

o que da uma representação integral conhecida (transformada de Mellin) da função $-\frac{\zeta'}{\zeta}$. Para terminar se aplica o seguinte teorema Tauberiano:

se $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma $O(x)$ quando $x \to \infty$ e

$$g(z) = z\int_1^\infty f(x)z^{-z-1}dx$$

existe para $\Re(z) > 1$, e $g(z) - \frac{c}{z-1}$ extende de forma analítica numa vizinhança de $z = 1$, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

O anterior implica que $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$, e pelo teorema do Chebycheff, segue se of TNP. ■

1.4 Aspeito geomêtrico

1.4.1 Subconjuntos simplesmente conexos do plano

O seguinte é um teorema fundamental da geometría e topología.

Teorema 5 (Riemann)**.** *Suponha que U é o interior de uma linha poligonal fechada em $\mathbb{C}$. Então existe uma função holomorfa $f : U \to \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, com inversa holomorfa.*

O teorema anterior é de fato muito mais geral: basta U ser simplesmente conexo, $U \neq \mathbb{C}$. Este é de fato um teorema geomêtrico, pois o fato de f ser bi-holomorfa (holomorfa, com inversa holomorfa) nos diz que f preserva ângulos.

A demostração de este teorema (que veremos nosso curso) segue um roteiro analítico. Consideremos

$$\mathcal{F} = \{f : U \to \mathbb{D} : f \text{ holonorfa e injetora}\}.$$

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$: é fácil construir uma função $h : U \to \mathbb{C}$ tal que sua imagem não interseta algum disco $\mathbb{D}(0, r)$. Assim, $\psi(z) = \frac{r}{h(z)}$ define uma função em $\mathcal{F}$.

2. Seja $A = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(w)|$, onde w é algum ponto em U. Com a teoría que veremos no curso não será difícil mostrar (um argumento de compacidade) que existe $f_0 \in \mathcal{F}$ com $f'(w) = A$.

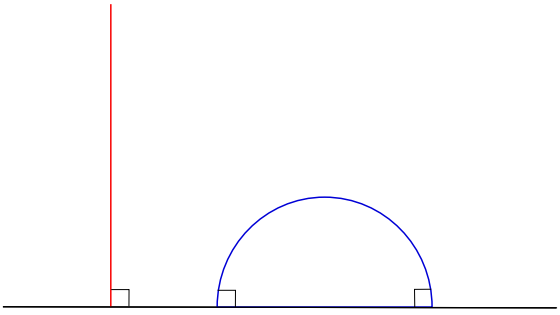
3. A parte central do argumento consiste em mostrar que f_0 é sobrejetora. Argumentando por contradição, assumimos $f_0(U) = V \subsetneq \mathbb{D}$. É um fato que demostraremos em nosso curso, que existe uma métrica d_P em $\mathbb{D}$ (a chamada métrica de Poincaré) tal que se $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é holomorfa, e h não é um quociente de mapar lineares $\frac{az+b}{cz+d}$, então

   $$\forall z, w \in \mathbb{D}, \quad d_P(hz, hw) < d_P(z, w).$$

   A função $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por $g(z) = z^2$ é holomorfa, e sem pérdida de geralidade podemos supor que $0 \notin V$, por tanto podemos considerar a inversa da g, $\sqrt{z} : V \to \mathbb{D}$. Como $0 \notin V$, $\sqrt{z}$ define uma função holomorfa, e por tanto contrai a métrica de Poincaré. Isto nos diz que g expande a métrica de Poincaré; assim a função $g \circ f_0 : U \to \mathbb{D}$ está em $\mathcal{F}$, e por um argumento elementar $|(g \circ f_0)'(w)| > f_0(w) = A$, o que é absurdo.

1.4.2 Geometría hiperbólica

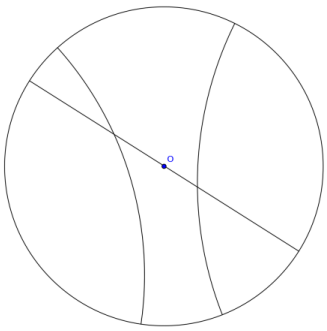
O plano de Lobatecheski (ou, plano hiperbólico) é $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$. Nele, podemos considerar a métrica riemanniana $\frac{dx^2+dy^2}{\Im(z)}$. Está é uma métrica completa em $\mathbb{H}$, de curvatura constante $= -1$, e os traços das geodésicas associadas são de dois tipos



Estudaremos esta geometría (geometría hiperbólica); mostraremos por exemplo que o grupo de isometrías associado é

$$\{M, M \circ T : M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, M \text{ não constante}, T(z) = -\bar{z}\}.$$

O mapa $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ é um bi-holomorfismo (transformada de Cayley), e envía a métrica hiperbólica na métrica de Poincaré antes referida. As geodésicas no disco são da forma $C \cap \mathbb{D}$, onde C é uma linhea reta passando pelo centro, ou um círculo $\perp$ á fronteira de $\mathbb{D}$.



1.4.3 Curvas algébricas

Concluímos enunciando um teorema (que no demostraremos neste curso) que mostra claramente a interação entre os aspeitos algebraicos, geométricos e analíticos. Diremos que R é uma superfície de Riemann si é uma superfície no sentido usual, e tem um atlas tal que suas mudanças de coordenadas são funções bi-holomorfas.

Por outro lado, $V \subset \mathbb{PC}^2$ é uma curva algêbrica se é uma variedade projetiva de dimensão complexa um: V se obtem como conjunto de zeros de polinômios homogéneos definidos em $\mathbb{C}^3$.

Teorema 6. *Se R é uma superfície de Riemann compacta, então existe $V \subset \mathbb{PC}^2$ curva algébrica e $\phi : V \to R$ analítica.*

Capítulo 2

Funções Holomorfas

2.1 Funções Diferenciáveis

Notas por Bruno de O.

Definição 1 (Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $f:\ \Omega \to \mathbb{R}^m$ em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo. Dizemos que f é diferenciável em $p \in \Omega$ se existe uma transformação linear $T_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que[1]:

$$\|f(p+v) - f(p) - T_p(v)\| = o(\|v\|), \tag{2.1}$$

quando $v \to 0$. De forma equivalente,

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - T_p(v)\|}{\|v\|} = 0. \tag{2.2}$$

Observação. Se a transformação linear T_p existe, é única.

De fato, se T e T' satisfazem a condição (2.2), por desigualdade triangular concluímos que:

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|T(v) - T'(v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Assim, para cada $w \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|T(tw) - T'(tw)\|}{|t|\,\|w\|} = 0,$$

de onde segue que $T(w) = T'(w)$.

Nota. Usaremos a notação $d_p f = T_p$.

[1] Sejam E, F espaços vetoriais. Então $\mathcal{L}(E, F)$ é o conjunto das transformações lineares de E para F.

Exemplo 2. Se $n = 2$ e $m = 1$ temos que $d_pf \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Consideremos as transformações lineares $dx,\ dy \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, cujas ações sobre um vetor $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ são dadas por:

$$dx(v) = v_x,$$
$$dy(v) = v_y.$$

Agora suponha que $T = \alpha dx + \beta dy = 0$, onde α e β são coeficientes reais. Temos que $T(1,0) = \alpha = 0$ e $T(0,1) = \beta = 0$. Logo $\{dx, dy\}$ é um conjunto linearmente independente. Sendo $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = 2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, concluímos que $\mathcal{B} = \{dx, dy\}$ é base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Expandiremos d_pf em termos dessa base:

$$d_pf = a(p)dx + b(p)dy,$$

com $a(p), b(p) \in \mathbb{R}$. Os coeficientes são tais que:

$$a(p) = d_pf(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p),$$
$$b(p) = d_pf(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

Então temos a expressão:

$$\boxed{d_pf = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot dy} \tag{2.3}$$

Observação. Precisamente devemos escrever $d_px = d_p\pi_x$.

Convenção: Neste curso (em sua grande maioria) estaremos interessados no caso $m = n = 2$ e, consequentemente, nas transformações $d_pf \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Além disso, como espaçoes vetoriais sobre $\mathbb{R}$, identificaremos $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ da forma natural: $(a, b) \simeq a + bi$.

Definição 2 (As transformações $\mathbb{R}$-lineares $dz, d\bar{z} : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$)**.** Seja $v = a + bi \in \mathbb{C}$.

$$dz(v) = a + bi = v,$$
$$d\bar{z}(v) = a - bi = \bar{v}.$$

Afirmação 1. O conjunto $\{dz, d\bar{z}\}$ é base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sobre $\mathbb{C}$.

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Considere $T = \alpha dz + \beta d\bar{z} = 0$. Temos que $T(1) = \alpha + \beta = 0$ e $T(i) = i(\alpha - \beta) = 0$. Segue que $\alpha = \beta = 0$. Além disso, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{C}$. ■

Segue como **consequência** da definição (2) e da afirmação (1) que se $f :\ \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em $p \in \Omega$, então:

$$d_pf = \alpha(p)dz + \beta(p)d\bar{z}. \tag{2.4}$$

Vamos determinar os coeficientes complexos $\alpha(p)$ e $\beta(p)$. Escrevemos $f(p) = u(p) + iv(p)$ com $u, v \in \mathbb{R}$. Por um lado, da equação (2.4) junto à Definição 2 segue que:

$$\begin{aligned} d_pf(1) &= \alpha(p) + \beta(p), \\ d_pf(i) &= i(\alpha(p) - \beta(p)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, sob o ponto de vista da identificação $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} d_pf(1) = d_pf(1,0) &= f_x(p) = u_x(p) + iv_x(p), \\ d_pf(i) = d_pf(0,1) &= f_y(p) = u_y(p) + iv_y(p). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Das relações (2.5) e (2.6) concluímos que:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \boxed{\frac{f_x(p) - if_y(p)}{2} := \frac{\partial f}{\partial z}(p)} \\ \beta(p) &= \boxed{\frac{f_x(p) + if_y(p)}{2} := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)} \end{aligned}$$

de forma que:

$$\boxed{d_pf = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) \cdot d\bar{z}} \tag{2.7}$$

Se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável num ponto $p \in \Omega$, então podemos expandir $d_pf \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ em termos da base $\{dz, d\bar{z}\}$ e afirmarmos que existem as derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial z}(p)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)$. Além disso, pelo critério de diferenciabilidade como apresentado na Definição 1, temos que:

$$\begin{aligned} \|f(p+v) - f(p) - d_pf(v)\| &= \left\| f(p+v) - f(p) - \frac{\partial f}{\partial z}(p) \cdot v - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) \cdot \bar{v} \right\| \\ &= o(\|v\|), \end{aligned} \tag{2.8}$$

quando $v \to 0$. Reciprocamente, se existem coeficientes complexos α e β tais que:

$$\|f(p+v) - f(p) - \alpha \cdot v - \beta \cdot \bar{z}\| = o(\|v\|),$$

quando $v \to 0$, então, por unicidade, f é diferenciável em $p \in \Omega$ com $\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial z}(p)$ e $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)$.

Se identificarmos os espaços $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \simeq Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, podemos escrever a transformação linear d_pf, derivada de uma função $f = u + iv$ em sua forma matricial como:

$$d_pf \simeq \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_p .$$

Segue que $\det d_p f = (u_x v_y - u_y v_x)_p$. Por outro lado, quando analisamos a diferença:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial z}(p)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)\right|^2 &= \frac{1}{2}\left[(f_x - if_y)(\bar{f}_x + i\bar{f}_y) - (f_x + if_y)(\bar{f}_x - i\bar{f}_y)\right] \\ &= if_x\bar{f}_y - if_y\bar{f}_x \\ &= (u_x v_y - u_y v_x)_p,\end{aligned}$$

concluímos que:

$$\det(d_p f) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(p)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)\right|^2. \tag{2.9}$$

2.2 A Álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

Notas por Pedro B.

Como vimos, existe uma inclusão canônica de anéis

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

que nos permite fazer a seguinte identificação $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}^2$. Esse espaço vetorial complexo tem dimensão 2, por isso vemos que dz e $d\bar{z}$ é uma base para tal. No que se segue usamos essa identificação para estudar os endomorfismos lineares de $\mathbb{R}^2$.

O Determinante

Dada uma transformação linear $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, L se escreve como

$$L = Adz + Bd\bar{z}, \quad A, B \in \mathbb{C} \tag{2.10}$$

pela discussão anterior. Seja $A = a + ib$ e $B = x - iy$, assim, via nossa identificação, temos que

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Como

$$dz = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d\bar{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & y-b \\ b+y & a-x \end{pmatrix}$$

logo concluímos que

$$\det(L) = a^2 + b^2 - (x^2 + y^2) = |A|^2 - |B|^2. \tag{2.11}$$

Podemos visualizar L em termos de A e B olhando sua ação em vetores da base $\{1, i\}$, como ilustrado na figura abaixo.

Figura 2.1: Ação de L nos vetores da base.

Demostração geométrica É possível fazer uma demostração do fato anterior utilizando a definição geométrica de determinante. Para $z = z_1 + iz_2, w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}$ definimos

$$z \wedge w = z_1 w_2 - z_2 w_1.$$

Perceba que $|z \wedge w|$ coincide com a norma do produto vetorial de z, w como vetores do plano. Por outro lado, o produto escalar complexo $z\bar{w}$ pode se calcular como

$$z\bar{w} = \langle z, w\rangle - i(z \wedge w)$$

onde $\langle z, w\rangle = z_1 w_1 + z_2 w_2$ é o produto escalar Euclídeo em $\mathbb{C}$. Tomando $z = L(1), w = L(i)$ temos

$$z\bar{w} = -2\Im(A\bar{B}) - i(|A|^2 - |B|^2)$$

Daqui,

1. $\det L = L(1) \wedge L(i) = |A|^2 - |B|^2$;
2. $\langle L(1), L(i)\rangle = -2\Im(A\bar{B})$. Se $A \neq 0$ então $L(1) \perp L(i) \Leftrightarrow B = rA$ com $r \in \mathbb{R}$.

A ação de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ em círculos.

Agora vamos estudar como figuras são deformadas por uma transformação linear. Seja

$$L_\mu = dz + \mu d\bar{z}, \quad \mu \in [0, 1)$$

usando a representação polar de um número complexo $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$L_\mu(z) = L_\mu(re^{i\theta}) = r[(1+\mu)\cos\theta + i(1-\mu)\sin\theta] \tag{2.12}$$

que a equação de uma elipse para r fixo. Assim, L mapeia círculos em elipses; note que o semi-eixo maior é a imagem do intervalo $[-r, r]$, e o semi-eixo menor é a imagem do intervalo $i[-r, r]$.

Suponha agora que $L = Adz + Bd\bar{z}$, com $|A| > |B|$, de modo que $\det(L) > 0$. Seja

$$\frac{A}{B} = \mu e^{i\alpha}, \text{ com } \mu \in [0, 1) \text{ e } \alpha \in [0, 2\pi)$$

então podemos escrever L como

$$\begin{aligned} L &= A(dz + \frac{B}{A}d\bar{z}) = A(dz + \mu e^{i\alpha} d\bar{z}) \\ &= Ae^{i\alpha/2}(e^{-i\alpha/2}dz + \mu e^{i\alpha/2}d\bar{z}). \end{aligned}$$

Com isso vemos que L se escreve como

$$H \circ R' \circ L_\mu \circ R$$

onde $R = e^{-i\alpha/2}dz$, que é uma rotação, L_μ é a transformação discutida anteriormente, e $H \circ R'$ corresponde a expansão e rotação associada com a multiplicação por $Ae^{i\alpha/2}$. Com isso, vemos que L também leva círculos em elipses! De fato, expansões e rotações preservam círculos, e nossa transformação L_μ leva círculos em elipses. Essa elipse pode ser determinada (a menos de rotações e expansões) por meio da razão de seu eixo maior por seu eixo menor, por isso, vale a pena a seguinte definição.

Definição 3. Seja $L = Adz + Bd\bar{z}$ com $|A| > |B|$, então definimos

$$K(L) = \frac{|\text{semi-eixo maior}|}{|\text{semi-eixo menor}|} = \frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{|A|+|B|}{|A|-|B|}.$$

Note que nessa definição precisamos que L seja um isomorfismo que preserva orientação, porém a ideia geométrica continua valida quando L não preserva orientação, nesse caso, basta inverter a ordem da base canônica em $\mathbb{R}^2$ (fazer uma reflexão), de maneira a "forçar"L a preservar a orientação.

Funções Diferenciáveis

Como comentado vemos que $L(S^1)$ é uma elipse com razão entre seus eixos dados por $K(L)$. Dada uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja a derivada é um isomorfismo que preserva orientação em $p \in U$, podemos pensar que f manda "círculos infinitesimais em p"em "elipses infinitesimais em $f(p)$", já que perto de $p \in U$, f se aproxima (a menos de uma translação) da transformação $d_p f$.

Como visto anteriormente,

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)d\bar{z}$$

de modo que

$$K_f(p) := K(d_p(f)) = \frac{|\partial_z f(p)| + |\partial_{\bar{z}} f(p)|}{|\partial_z f(p)| - |\partial_{\bar{z}} f(p)|}. \tag{2.13}$$

O valor acima representa o quanto f deforma círculos infinitesimais, por isso definimos o seguinte.

Definição 4. Para $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável cuja a derivada em p é um isomorfismo que preserva orientação, definimos

$$K_f(p) = \frac{|\partial_z f(p)| + |\partial_{\bar{z}} f(p)|}{|\partial_z f(p)| - |\partial_{\bar{z}} f(p)|}$$

como a distorção de f em p.

Observe que $K_f(p) \geq 1$ e que

$$K_f(p) = 1 \iff \partial_{\bar{z}} f(p) = 0.$$

Quando isso ocorre, f preserva círculos infinitesimais, e sua derivada em p se escreve como

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial z}(p) dz.$$

Nesse caso $d_p f$ é uma transformação conforme, isso é, que preserva orientação e ângulos. Podemos pensar em transformações conformes como um generalização do grupo de matrizes ortogonais com determinante 1 ($SO(2)$). Caso além de preservarem ângulos e orientações, tais transformações também preservassem distâncias, elas seriam exatamente o grupo de transformações ortogonais de determinante 1!.

Notas por Victor J.

Definição 5. Dizemos que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é conforme em $p \in U$ se f é diferenciável em p e $d_p f$:

- preserva orientação;
- preserva ângulos entre vetores.

Dizemos que f é conforme em U se é conforme em todo $p \in U$ e injetora.

Corolário 7. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável e injetora. Se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, então f é conforme.*

Demonstração. Uma vez que para todo $p \in U$ $d_p f = A.d_z$ ($A = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$). Temos $\det(d_p f) = |A|^2 > 0$ e dados $v, w \in \mathbb{R}^2$, $d_p f.v = A.v$, $d_p f.w = A.w$, com isso $\angle v, w = \angle d_p f.v, d_p f.w$. ■

2.3 Funções Holomorfas

Definição 6. Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é holomorfa em $p \in U$ se existe $f'(p) \in \mathbb{C}$ tal que:

$$f(p + v) = f(p) + f'(p).v + o(v) \tag{2.14}$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $p + v \in U$. De forma equivalente, vale que:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - f(p) - f'(p).v}{v} = 0$$

Dizemos que f é holomorfa em U e notamos $f \in H(U)$ se é holomorfa em todo $p \in U$.

Em alguns textos diz-se que f é derivável no sentido complexo ao se referir a uma função holomorfa.

Proposição 8. *f é holomorfa em $p \iff$ f é diferenciável em p e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0$.*

Demonstração. Se f é holomorfa em p, basta tomar $T_p = f'(p).dz$ e teremos a diferenciabilidade de f pelas equações 2.1 e 2.14. Pela unicidade de T_p, temos que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0$.

Por outro lado se f é diferenciável em p e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0$, então tomando $f'(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p)$ temos o resultado da mesma forma ao anterior. ■

Neste caso, portanto, sabemos calcular a derivada de uma função holomorfa f a partir de suas derivadas parciais da seguinte forma:

$$f'(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{f_x(p) - if_y(p)}{2},$$

e como $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0$, temos $f_x(p) = -if_y(p)$. Ao escrevermos $f = u + iv$, onde $u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são suas funções coordenadas. Temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} f'(p) = f_x(p) &= u_x(p) + iv_x(p) \\ &= -if_y(p) = v_y(p) - iu_y(p) \end{aligned}$$

Tais relações são conhecidas como as Equações de Cauchy-Riemann, podendo ser escritas das seguintes formas equivalentes:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0, \qquad f_x(p) = -if_y(p), \qquad \begin{cases} u_x(p) = v_y(p) \\ -u_y(p) = v_x(p). \end{cases} \tag{2.15}$$

Com isto, dada f holomorfa no ponto p, temos $d_pf = f'(p).dz$ preserva ângulos e $\det(d_pf) = |f'(p)|^2 > 0$. Dessa forma, a função f é conforme em p. Mostraremos que vale a recíproca.

Proposição 9. *Se uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é conforme em $p \in U$, então f é holomorfa em p.*

Demonstração. Como f é conforme em p, se $d_pf = Adz + Bd\bar{z}$, com $A, B \in \mathbb{C}$, então:

$$\det(d_pf) = |A|^2 - |B|^2 > 0 \Rightarrow A \neq 0$$

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, temos $d_pf.v = A.v + B\bar{v}$, logo:

$$\frac{d_pf.v}{v} = A + B\frac{\bar{v}}{v}$$

Como d_pf preserva ângulos, $\arg(\frac{d_pf.v}{v})$ não depende de v, e como $\arg(\frac{\bar{v}}{v}) = 2\arg(v)$, concluímos que $B = 0$, isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0.$$

E portanto f satisfaz as Equações de Cauchy-Riemann e com isto f é holomorfa em p. ■

Observação. Se $f'(p) = re^{i\theta}$, podemos identificar a transformação $d_pf = f'(p).dz$, como:

$$d_pf.v = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.v$$

Da matriz da transformação identificamos as Equações de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y = \cos\theta, \quad u_y = -v_x = \sin\theta.$$

Além disso, tal matriz é ortogonal, justamente tais matrizes preservam ângulos entre vetores.

Notas por Igor Soares

Relembrando a definição de função holomorfa [6]. Uma função é dita holomorfa se para todo ponto de seu domínio esta função é holomorfa neste ponto. A seguir temos um lema que demonstra algumas propriedades da derivada de funções complexas:

Lema 10. *Sejam $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas. Valem:*

1. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, $f + \alpha g$ é holomorfa e $(f + \alpha g)'(p) = f'(p) + \alpha g'(p)$*
2. *$f \cdot g$ é holomorfa e $(f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$*
3. *Se $g'(p) \neq 0$ então $(\frac{f}{g})'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$*

Demonstração. Será feita a demonstração somente do primeiro item, os outros itens a demonstração é análoga.

Pela definição de função holomorfa [6]:

$$f(p+v) - f(p) - f'(p) \cdot v = o(v)$$
$$g(p+v) - f(p) - f'(p) \cdot v = o(v)$$

Logo,

$$(f + \alpha g)(p+v) - (f + \alpha g)(p) - (f' + \alpha g')(p) \cdot v = o(v)$$

Como queríamos.

■

Uma consequência da primeira propriedade do Lema anterior é o fato que $H(U)$ é um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{C}$, mais que isso, é fácil ver que $H(U)$ herda dos complexos as propriedades de associatividade (da soma e do produto de funções), a distributividade e comutatividade (da soma e produto), portanto $H(U)$ é um **anel comutativo** com as operações de soma de funções e multiplicação de funções, além disso o produto de funções é compatível com o produto de escalares, um conjunto com tais propriedades se dá o nome de **álgebra** sobre $\mathbb{C}$.

Sobre um anel é natural pensar quais são os elementos invertíveis, chamados de unidades.

$$Uni(H(U)) = \{f \in H(U) | f(p) \neq 0 \ \ \forall p \in U\}$$

Proposição 11. *(Regra da Cadeia)*

Sejam $f, g \in H(U)$, então $f \circ g \in H(U)$ vale a regra $(f \circ g)'(p) = f'(g(p)) \cdot g'(p)$

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração feita no lema anterior [10] e será deixada como exercício. ■

Agora veremos uma definição análoga ao difeomorfismo:

Definição 7. Uma função $f : U \longrightarrow V$, $U, V \in \mathbb{C}$ é dita **bi-holomorfa** se satisfaz:

- f é bijetora.
- f, f^{-1} são holomorfas.

Em particular, se uma função é bi-holomorfa, temos:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(z) =& z \\ (f^{-1} \circ f)'(z) =& (f^{-1})' \circ f(z) \cdot f'(z) = 1 \end{aligned}$$

Ou seja, $(f^{-1})' \circ f(z) \neq 0$ e $f'(z) \neq 0$, então por [7] temos que se f é bi-holomorfa então é uma função conforme.

Agora veremos um teorema que dá condições simples para que a função seja bi-holomorfa em uma vizinhança.

Teorema 12. *Seja $f \in H(U)$, tal que $f'(p) \neq 0$, então existem abertos A, B, $p \in A \subset U$ e $f(p) \in B \subset f(U)$ de forma que a restrição $f : A \longrightarrow B$ é bi-holomorfa.*

Demonstração. Sabemos que $det(d_p f) = |f'(p)|^2 > 0$, além disso $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ logo pelo Teorema da Função Inversa, existem A, B abertos tais que $p \in A$, $f(p) \in B$, e a restrição $f : A \longrightarrow B$ é difeomorfismo.

Para terminar a demonstração basta mostrar que a inversa f^{-1} é holomorfa, para isso vamos mostrar que a inversa satisfaz as equações de Cauchy-Riemann [2.15].

Toma $q \in A$, então a matriz jacobiana no ponto q é:

$$M_q = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix}_q = \lambda \cdot O$$

Onde O é uma matriz ortogonal e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Além disso, sabemos que a matriz jacobiana da inversa (no ponto $f(q)$) é igual a inversa da matriz M_q. Ou seja,

$$M_q^{-1} = \lambda^{-1} O^{-1}$$

Onde O^{-1} é uma matriz ortogonal. Assim M_q^{-1} também é uma aplicação conforme e portanto satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

■

Observação. Se $f'(p) \neq 0$ para todo $p \in U$ não podemos concluir que f é injetiva em todo o U.

Um contra-exemplo é a função exponencial $f(x+iy) = e^x(cos(y)+isen(y))$, cuja derivada é ela própria ($e^z \neq 0$), porém é periódica $f(z) = f(z + 2i\pi)$.

Capítulo 3

Integração

3.1 Formas Diferenciais

Notas por Bruno O.

Padronizaremos as seguintes notações:

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\},$$
$$\hat{\mathbb{C}}^* = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}.$$

Dado um aberto $U \subset \hat{\mathbb{C}}$,

Definição 8. uma **0-forma** em U é uma função contínua $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ e,

Definição 9. uma **parametrização local** em U é um difeomorfismo $\phi : A \to B$ entre abertos $A \subset \hat{C}$ e $B \subset U$.

Como **exemplos** para a Definição 9, citamos:

1. Se $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, $\phi = Id : U \to U$ é uma parametrização local.
2. Sejam $U = \mathbb{C}^*$, $A = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ e $B = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$. Então $\phi : A \to B$ tal que
$$\phi(r, \theta) := e^r \cos(\theta) + ie^r \sin(\theta)$$
é uma parametrização local.
3. Seja $U = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Temos que
$$\phi(z) = \begin{cases} 1/z, & se\ z \neq 0 \\ \infty, & se\ z = 0 \end{cases}$$
é uma parametrização local.

À inversa de uma parametrização local ϕ damos o nome de **carta local**. É usualmente denotada por $z : B \subset U \to \mathbb{R}$ onde

$$z = x + iy \text{ em que } \begin{cases} x : B \to \mathbb{R} \\ y : B \to \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.1.1 1-Formas

Definição 10. Uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(z(B), \mathbb{C})$ em U é uma escolha, para cada carta local $z : B \subset U \to \mathbb{C}$, de duas funções contínuas $f, g : z(B) \to \mathbb{C}$, para as quais escrevemos

$$\omega = f dx + g dy.$$

Além disso, as escolhas devem satisfazer à seguinte condição de compatibilidade:

- Sejam

  $$z : B \to \mathbb{C}$$
  $$\tilde{z} : \tilde{B} \to \mathbb{C},$$

  cartas cujos domínios $B, \tilde{B}$ tem interseção não nula. Escrevemos a 1-forma ω em coordenadas z e $\tilde{z}$, respectivamente, como

  $$\begin{aligned} \omega &= f dx + g dy \\ &= \tilde{f} d\tilde{x} + \tilde{g} d\tilde{y}. \end{aligned}$$

  Então deve ser verdadeira a relação:

  $$\begin{bmatrix} \tilde{f}(\tilde{z}) \\ \tilde{g}(\tilde{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(z(\tilde{z})) \\ g(z(\tilde{z})) \end{bmatrix}.$$

  .

Exemplo 3. Seja $U = \mathbb{C}$, consideramos duas parametrizações:

$$\begin{aligned} z :&\ \ B = U \to \mathbb{C}, \ \text{(Identidade)} \\ \tilde{z} :&\ \ \tilde{B} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \end{aligned}$$

tal que $\tilde{z}^{-1}(r, \theta) = e^r \cos\theta + i e^r \sin\theta$. A mudança $\tilde{z} \to z$ é equivalente às identidades $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Assim, podemos escrever a 1-forma ω, definida a seguir, em ambas as coordenadas.

$$\begin{aligned} \omega &= e^x dx + \sin(xy) dy \\ &= e^{r\cos\theta}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + \sin(r^2 \sin\theta\cos\theta)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= (e^{r\cos\theta} + \sin(r^2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta) dr + (r\cos\theta\sin(r^2\sin\theta\cos\theta) - r e^{r\cos\theta}\sin\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Se temos duas cartas locais

$$z : B \to \mathbb{C}$$
$$\tilde{z} : \tilde{B} \to \mathbb{C},$$

tais que $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$, denominamos o difeomorfismo

$$z \circ \tilde{z}^{-1} : \tilde{z}(B \cap \tilde{B}) \to z(B \cap \tilde{B})$$

por **mudança de coordenadas** (correspondente) (ver Figura (3.1). Para tal, usaremos a notação $\tilde{z} \to z$. Ilustremos com um exemplo simples. Seja $U = \hat{\mathbb{C}}$. Definimos as cartas locais

$$\phi^{-1} : B = \hat{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C} \qquad\qquad \tilde{\phi} : \tilde{B} = \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$$
$$z \to \begin{cases} 1/z, & z \neq \infty, \\ 0, & z = \infty \end{cases} \qquad\qquad z \to z$$

A mudança de coordenadas é trivialmente o difeomorfismo

$$\tilde{\phi} \circ \phi^{-1} : \ \tilde{B} \cap B = \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$
$$z \to 1/z,$$

que mapeia um número complexo em seu inverso.

3.1.2 2-Formas

Novamente, seja $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ um conjunto aberto.

Definição 11. Uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(z(B), \mathbb{C})$ em U é uma escolha, para cada carta local $z : \ B \subset U \to \mathbb{C}$ de uma função contínua $f : \ z(B) \to \mathbb{C}$ para a qual escrevemos

$$\omega = f dx \wedge dy.$$

Além disso, se z e $\tilde{z}$ são duas cartas locais, a seguinte condição de compatibilidade deve ser satisfeita:

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = f(z(\tilde{z})) \det A,$$

em que $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix}$ a matriz jacobiana da transformação $\tilde{z} \to z(\tilde{z})$, apresentada na Definição (10).

Observação. Se a mudança $\tilde{z} \to z(\tilde{z})$ é holomorfa, então $\det A = \left| \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \right|^2$.

Notas por Pedro B.

Deixe M denotar qualquer aberto de algum dos espaços $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\hat{\mathbb{C}}$ ou $\hat{\mathbb{C}}^*$. Mesmo que não saibamos diferenciar na esfera de Riemann podemos usar os homeomorfismos locais

$$\varphi := \frac{1}{z} : \hat{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

onde $1/\infty = 0$, e

$$\psi := \mathrm{id} : \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

para pensar nos pontos de $\hat{\mathbb{C}}$ como pontos de $\mathbb{C}$. Chamamos esses homeomorfismos juntos aos seus domínios de cartas. Observe que a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ é holomorfa e um difeomorfismo na interseção dos domínios das cartas. De maneira geral, em M, para cartas em um mesmo aberto $U \subset M$, a mudança é um difeomorfismo (por definição de cartas!).

Como vimos, uma forma em M é uma escolha de para cada carta (φ, U) de M uma 1-forma em $\varphi(U)$, isso é, uma função contínua $\omega : \varphi(U) \to \Omega^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, sujeita às condições

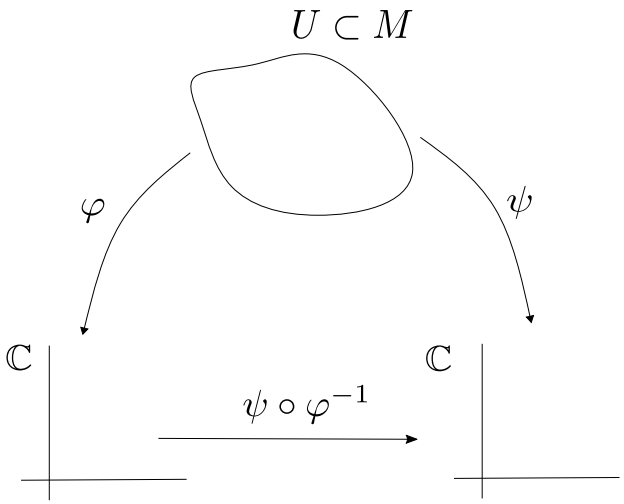


Figura 3.1: Ilustração da mudança de coordenadas.

de compatibilidade. Definimos uma forma dessa maneira pois na verdade gostaríamos de ter uma forma em M como um todo, porém não temos como falar de formas em M, já que não sabemos como os espaços tangentes de M são, ao contrário de $\mathbb{C}$, onde todo espaço tangente é $\mathbb{C}$! Vemos que a condição de compatibilidade da escolha de formas se resume a dizer que essas escolhas de formas são invariante por *pullbacks* de mudanças coordenadas.

Definição 12. Seja $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, e seja $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, definimos o pullback de ω por f, denotada por $f^*w \in \Omega^k(U, \mathbb{C})$, como

$$(f^*\omega)_m(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(m)}(d_m f(v_1), \ldots, d_m f(v_k)).$$

É imediato de nossas definições o seguinte resultado:

Proposição 13. *Seja ω uma k-forma em M, $k = 1$ ou 2. Sejam (ψ, U) e (φ, U) cartas no mesmo domínio U, e seja $\omega_2 \in \Omega^k(\psi(U), \mathbb{C})$ a escolha de forma para ψ e $\omega_1 \in \Omega^k(\psi(U), \mathbb{C})$ a escolha de forma para φ, então*

$$\omega_2 = (\psi \circ \varphi^{-1})^* \omega_1.$$

Caso isso não esteja claro esse é um bom exercício para se acostumar com pullbacks. Note que nossa definição captura a ideia de definir um objeto global[1] em M.

Dada uma 1-forma em M, seja $\omega = f dx + g dy$ uma representação local em uma carta, podemos mudar a base na qual estamos representando essas formas, considere

$$dz = dx + i dy \text{ e } d\bar{z} = dx - i dy$$

essas formas são claramente LI, logo formam uma base, assim sabemos que

$$\omega = u dz + v d\bar{z}$$

[1] M é na verdade uma *variedade diferenciável*, e para tais, podemos definir formas em M de maneira abstrata e de fato a definição que demos para formas é equivalente a essa.

logo, concluímos que

$$\boxed{u = \frac{f - ig}{2}} \text{ e } \boxed{v = \frac{f + ig}{2}.}$$

Podemos fazer o mesmo para 2-formas. Temos que

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$$

logo, se $\omega = f dx \wedge dy$, temos que

$$\omega = g dz \wedge d\bar{z}$$

onde

$$\boxed{g = \frac{if}{2}.}$$

3.2 Integração de 1-Formas

Seja

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

uma curva C^1 por partes, além disso, suponha que $\text{im}(\gamma) \subset B$, onde B é o domínio de uma carta (B, z) de M. Vamos definir a integral de uma 1-forma em M sobre γ.

Definição 13. Seja $\gamma : [a, b] \to M$ como acima, $\omega = f dx + g dy$ a representação local de ω em $z(B) \subset \mathbb{C}$ e $z(t) = x(t) + iy(t) = z \circ \gamma(t)$ então definimos

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b f(z(t))\dot{x}(t) + g(z(t))\dot{y}(t)dt.$$

Note que isso se resume a integração de formas definidas no intervalo $[a, b]$, de fato estamos integrando a 1-forma

$$z(t)^*\omega \in \Omega^1([a, b], \mathbb{C}).$$

Para tornar isso mais claro, veja que uma forma $\omega \in \Omega^1([a, b], \mathbb{C})$ é simplesmente

$$\omega_1 + i\omega_2, \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1([a, b]).$$

Em nossa definição de integral usamos fortemente uma escolha de representação local da forma em uma carta, então naturalmente temos que mostrar que o valor da integral independe dessa escolha:

Lema 14. *Seja $z, \tilde{z}$ duas cartas associados a mesmo aberto B, então a integral de de uma 1-forma ω sobre uma curva C^1, $\gamma \subset B$ tem o mesmo valor independente da carta escolhida.*

Demonstração. Sejam ω_1, ω_2 a representação de ω nas cartas z, $\tilde{z}$ respectivamente, de acordo com a discussão acima, vemos que estamos integrando a forma

$$(z \circ \gamma)^*\omega_1 \in \Omega^1([a, b], \mathbb{C})$$

assim, basta mostrar que

$$(z \circ \gamma)^*\omega_1 = (\tilde{z} \circ \gamma)^*\omega_2.$$

Como $z \circ \gamma = z \circ \tilde{z}^{-1} \circ \tilde{z} \circ \gamma$ vemos que

$$\begin{aligned}(z \circ \gamma)^* \omega_1 &= (z \circ \tilde{z}^{-1} \circ \tilde{z} \circ \gamma)^* \omega_1 \\ &= (\tilde{z} \circ \gamma)^* (z \circ \tilde{z}^{-1})^* (\omega_1) = (\tilde{z} \circ \gamma)^* (\omega_2).\end{aligned}$$

onde estamos usando o fato que $(f \circ g)^* \omega = g^* f^* \omega$. ■

Vejamos agora que nossa definição captura a ideia de integrar no sentido em que a curva anda. Seja $\gamma : [0,1] \to M$ e seja $\phi : [0,1] \to [0,1]$ o homeomorfismo definido por $\phi(x) = (1-x)$. Então, vemos que $\tilde{\gamma}(t) := \gamma \circ \phi(t) = \gamma(1-t)$ de modo que a curva percorre o caminho ao contrário. Agora, observe que para uma 1-forma $\omega \in \Omega^1([0,1], \mathbb{C})$,

$$\phi^* \omega = -\omega$$

assim, para uma 1-forma em M representada numa carta z, chegamos em

$$(z \circ (\gamma \circ \phi))^* \omega = -(z \circ \gamma)^* \omega$$

logo concluímos que

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

Isso captura a ideia intuitiva de cálculo de se inverter os limites da integral. Mais geralmente, dado um difeomorfismo

$$\phi : J \longrightarrow I$$

onde I e J são intervalos, para uma forma $\omega \in \Omega^1(I, \mathbb{C})$ temos que

$$\int \phi^* \omega = \int \omega$$

se ϕ é crescente e

$$\int \phi^* \omega = -\int \omega$$

caso ϕ seja decrescente.

Notas por Victor J.

No caso mais geral, dada a curva C^1 por partes $\gamma : [a,b] \to M$, existe uma quantidade finita de cartas $\{(z_i, B_i)\}_{i=1}^k$ e valores $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b$ tais que cada $\gamma_i = \gamma | [t_{i-1}, t_i]$ satisfaz $Im(\gamma_i) \subset B_i$. Podemos assim, definir a integral:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \omega.$$

Como visto, a integral independe da escolha da carta, e portanto independe da escolha de $\{(z_i, B_i)\}_{i=1}^k$.

3.3 Operador de Hodge

Começamos introduzindo para funções $f : U \subset \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ de classe C^1, com $z : B \subset \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ uma carta fixada, o operador diferencial $d : C^1(U) \to \Omega^1(z(U), \mathbb{C})$

$$df = f_x dx + f_y dy = \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}$$

define uma 1-forma em $\mathbb{C}$. Notamos os operadores $\partial f = \partial_z f dz$ e $\bar{\partial} f = \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}$, temos $d = \partial + \bar{\partial}$.

Definição 14. Uma carta qualquer (z, B) em $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ é dita holomorfa quando:

1. se $\infty \notin B$, (z, B) é holomorfa quando $z : B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa (6);
2. se $\infty \in B$, podemos assumir sem perda de generalidade que $0 \notin B$, assim (z, B) é holomorfa se a composição $z \circ (a \mapsto 1/a) : B' \ni 0 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa.

Perceba que ao tomarmos $w : B \to \mathbb{C}$ uma outra carta qualquer e tomamos a mudança de coordenadas $w \mapsto z(w)$, temos:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial w} dw + \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} d\bar{w}.$$

Assim que se (w, B) é uma carta holomorfa, pelas equações de CR (2.15) temos $\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} = 0$. Assim:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} dw = \frac{\partial f}{\partial w} dw.$$

Dessa forma, o operador independe da carta escolhida ao utilizarmos cartas holomorfas. Podemos também, utilizando a estrutura holomorfa das cartas definir o operador de Hodge.

Definição 15. Seja $\omega = f dx + g dy$ uma 1-forma qualquer, definimos o operador "Estrela"de Hodge como:

$$*\omega := -g dx + f dy.$$

Seja (z, B) uma carta coordenada holomorfa e seja $\omega = a(z)dz + b(z)d\bar{z}$, definimos:

$$*\omega := -ia(z)dz + ib(z)d\bar{z}.$$

Lema 15. *O operador de Hodge é invariante sob mudanças de coordenadas holomorfas, isto é, se (w, B) é outra carta holomorfa e $\omega = \tilde{a}dw + \tilde{b}d\bar{w}$, então:*

$$*w = -i\tilde{a}dw + i\tilde{b}d\bar{w}.$$

Demonstração. Como ambas cartas são holomorfas, a mudança de coordenadas $w \mapsto z(w)$ é uma função holomorfa do plano, assim que:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial w} dw, \quad d\bar{z} = \overline{\frac{\partial z}{\partial w}} d\bar{w}.$$

Portanto:

$$-iadz + ibd\bar{z} = -i \underbrace{a \frac{\partial z}{\partial w}}_{\tilde{a}} dw + i \underbrace{b \overline{\frac{\partial z}{\partial w}}}_{\tilde{b}} d\bar{w}$$

■

Desta forma, o operador está bem definido e independe da carta holomorfa escolhida. Observe que o mesmo não é certo para cartas diferenciáveis no geral.

Exemplo 4. Dada $\omega = udx + vdy$, com $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ uma 1-forma no plano, podemos associá-la a um campo vetorial

$$X_\omega = (u, v) = u(1, 0) + v(0, 1)$$

Ao olharmos para o campo vetorial associado à forma $*\omega$, temos:

$$X_{*\omega} = (-v, u) \perp X_\omega$$

Sendo assim, o operador age como uma rotação sobre o campo associado a uma 1-forma.

Se $\gamma : I \to \mathbb{C}$ é uma curva regular, $\gamma = u+iv$ con vetor tangente unitário X. Consideramos o vetor normal à curva $X_\perp$ e para uma função $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sua derivada na direção normal é

$$\frac{\partial h}{\partial X_\perp} = \langle \nabla h, X_\perp \rangle = -h_x \frac{\dot{y}}{|\gamma'(t)|} + h_y \frac{\dot{x}}{|\gamma'(t)|}.$$

Concluímos que

$$\frac{\partial h}{\partial X_\perp} d|z| = *dh$$

Observação. Com este exemplo, não é difícil notar que:

$$** \omega = -\omega$$

Exemplo 5. Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua, com funções coordenada $f = u + iv$ pode ser associada a uma 1-forma complexa como

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\ &= \omega_1 + i\omega_2, \end{aligned}$$

onde ω_1, ω_2 são 1-formas reais, e é fácil de ver que $\omega_2 = *\omega_1$. Assim que $f(z)dz = \omega_f + i*\omega_f$, isto é, a parte imaginária está determinada pela parte real da forma a partir do operador de Hodge. Desta forma a integral:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega_f + i \int_\gamma *\omega_f. \tag{3.1}$$

Notas por Igor Soares

3.4 Integral de 2-formas

Nessa seção definiremos oque são integrais de 2-formas, e prosseguiremos de maneira análoga ao feito para integrais de 1-forma.

Definição 16. Seja $Z : B \longrightarrow \mathbb{C}$ uma carta local, $\Omega = f(x + iy)dx \wedge dy$ uma 2-forma e $\xi : [0, 1]^2 \longrightarrow B$ uma parametrização de B que seja de classe C^1 por partes, onde $Z(t, s) = Z(\xi(t, s))$ definimos a integral:

$$\int_\xi \Omega = \int_0^1 \int_0^1 f(Z(t, s)) \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dtds$$

Teorema 16. *A integral não depende da carta escolhida.*

Agora definiremos os operadores $d, \partial, \bar{\partial}$.

Definição 17. Seja $\omega \in \Omega'(U) = \{$ 1-formas com coeficientes $C^1\}$

- $\omega = fdx + gdy$

$$\begin{aligned} d\omega :=& df \wedge dx + dg \wedge dy \\ =& (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy \\ =& (g_x - f_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

- Suponha $\omega = adz + bd\bar{z}$

$$\begin{aligned} \partial\omega :=& \partial a dz + \partial b d\bar{z} \\ =& (\frac{\partial a}{\partial z} dz) \wedge dz + (\frac{\partial b}{\partial z} dz) \wedge d\bar{z} \\ =& \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

- Suponha $\omega = adz + bd\bar{z}$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\omega :=& \bar{\partial} a dz + \bar{\partial} b d\bar{z} \\ =& (\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z}) \wedge dz + (\frac{\partial b}{\partial \bar{z}} d\bar{z}) \wedge d\bar{z} \\ =& -\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

Podemos verificar que $d = \partial + \bar{\partial}$

$$\begin{aligned} \partial\omega + \bar{\partial}\omega &= \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= -2i \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right) dx \wedge dy \\ &= (g_x - f_y)\, dx \wedge dy \end{aligned}$$

Agora precisaremos de um teorema de análise que não provaremos, chamado de teorema de Stokes.

Teorema 17. *(Stokes) Seja $\xi : [0,1]^2 \longrightarrow U$ de classe C^1 por partes. Cujo bordo de ξ ($\partial(\xi)$) é uma união orientada de restrições de ξ no bordo de $[0,1]^2$ $\omega \in \Omega^1(U)$, (de fato é importante que seja de classe C^1 e não apenas C^1 por partes) então:*

$$\int_\xi d\omega = \int_{\partial\xi} \omega$$

Definição 18. Uma forma $\omega \in \Omega^1(U)$ é dita:

- **Exata** se existe uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 tal que :

$$df = \omega$$

- **Co-exata** se $*\omega$ é uma forma exata.
- **Fechada** se:

$$d\omega = 0$$

- **Co-fechada** se :

$$d(*\omega) = 0$$

Lema 18. *Se ω é exata então é fechada.*

Demonstração.

$$\omega = dg = g_x dx + g_y dy$$

$$\begin{aligned} d\omega =& g_{xx} dx \wedge dx + g_{xy} dx \wedge dy + g_{yx} dy \wedge dx + g_{yy} dy \wedge dy \\ =& \left(g_{xy} - g_{yx}\right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Pelo teorema de Schwarz das derivadas que diz $g_{xy} = g_{yx}$. ■

Definição 19. (Laplaciano) Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 e fixamos uma carta $Z = X + iY$ definimos o Laplaciano de f como:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy$$

Podemos observar que $\Delta f = d * df = -2i\bar{\partial}\partial f$, assim podemos concluir que o Laplaciano não depende da carta analítica.

Definição 20.

- Seja f sob as mesmas hipóteses anteriores, f é dita **Harmônica** se :

$$\Delta f = 0$$

- Seja ω uma 1-forma, é dita **Harmônica** se localmente pode ser escrita como $\omega = df$ com f harmônica.

Capítulo 4

Funções Analíticas

Notas por Bruno O.

4.1 Potênciais Holomorfos

Diremos que uma função complexa $f : U \to \mathbb{C}$, de um aberto $U \subset \mathbb{C}$ para o plano complexo, possui **potêncial holomorfo** se existe $g \in \mathcal{H}(U)$ tal que $g'(z) = f(z)$, para todo $z \in U$. Neste caso, é imediato que a 1-forma $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$ definida por

$$\omega = f(z)dz$$

é exata. Isto é, $\omega = dg$. Segue que, para todo caminho $\gamma : [0, 1] \to U$, $\gamma \in C^1$, a seguinte igualdade se valida:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma dg = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)).$$

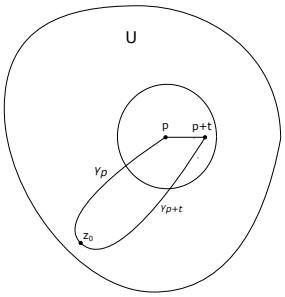
A integral no caminho γ de uma forma que possui potencial holomorfo depende apenas dos pontos extremos de γ. Naturalmente, se γ é um caminho fechado ($\gamma(0) = \gamma(1)$), então:

$$\int_\gamma \omega = 0. \tag{4.1}$$

Dentro das hipóteses adequadas, a recíproca é verdadeira. Formalmente, provaremos o Lema a seguir.

Lema 19. *Seja $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ uma 1-forma contínua em um aberto conexo U. Se $\int_\gamma \omega = 0$ para todo caminho fechado $\gamma \in U$ então ω é exata.*

Demonstração. Fixamos um ponto $z_0 \in U$ e definimos a função real $a(z) = \int_{\gamma_z} \omega$, em que γ_z é uma curva cujos pontos inicial e final são, respectivamente, z_0 e z.



Por continuidade de ω, a é bem definida. Fixamos uma carta numa vizinhança $B \subset U$ de $p \in U$ e escrevemos $\omega = udx + vdy$ em relação a tal carta. Identificando $B \simeq \mathbb{C}$, consideramos o ponto $p + t$ como um incremento horizontal em p. Considerações feitas, estudaremos a expressão:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a(p+t)-a(p)}{t} - u(p)\right| &= \left|\frac{1}{t}\int_{[p,p+t]} \omega - u(p)\right| \\ &= \left|\frac{1}{t}\int_0^t (u(p+s)-u(p))ds\right|,\end{aligned}$$

pela condição da não variação em y de $\gamma_p - \gamma_{p+t}$. Daí vem que:

$$\left|\frac{a(p+t)-a(p)}{t} - u(p)\right| \leq \max_{0\leq s\leq t} |u(p+s)-u(p)| \to 0$$

quando $t \to 0$, dada a continuidade de u. Portanto, podemos concluir que existe

$$\lim_{t\to 0} \frac{a(p+t)-a(p)}{t} = \frac{\partial a}{\partial x}(p) = u(p)$$

contínua. Repetimos um argumento semelhante para demonstrar que $\dfrac{\partial a}{\partial y} = v(p)$, também contínua. Logo, $a \in C^1$ tal que $da = udx + vdy = \omega$. ■

Corolário 20. *´ Uma função $f \in C(U, \mathbb{C})$ possui potencial holomorfo se, e somente se $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo caminho fechado $\gamma \in U$.*

Demonstração. Se f possui potencial holomorfo, então $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo caminho fechado (discussão prévia à equação (4.1)). Por outro lado, por (3.1) podemos escrever

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega_f + i\int_\gamma *\omega_f,$$

em que ω_f e $\star\omega_f$ são formas reais. Logo, pelo Lema anterior, existem funções a e b de classe C^1 tais que $da = \omega_f$ e $db = *\omega_f$. Segue que $g = a + ib$ é também de classe C^1 tal que

$$dg = da + idb = \omega_f + i * \omega_f = f(z)dz.$$

A igualdade acima também nos diz que $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ e, consequentemente, g é holomorfa em U. Concluímos que f possui potencial holomorfo g. ■

4.1.1 Funções harmônicas

Seja $f \in \mathcal{H}(U)$, escrita como $f = u + iv$ (posteriormente, mostraremos que tal condição implica $f \in C^\infty$). Analisemos a ação do operador $d * d$ em f:

$$\begin{aligned} d * df &= d * (du + idv) \\ &= d * [(u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy] \\ &= -d(u_y + iv_y)dx + d(u_x + iv_x)dy \\ &= [(u_{xx} + u_{yy}) + i(v_{xx} + v_{yy})]dx \wedge dy \\ &= \Delta u + i\Delta v = \Delta f. \end{aligned}$$

Por outro lado, se escrevermos $f = f(z)$, temos:

$$\begin{aligned} d * df &= d * \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\ &= d\left(-i\frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\ &= i\frac{\partial f}{\partial z\partial \bar{z}}dz \wedge d\bar{z} = i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = 0, \end{aligned}$$

pelo Teorema de Schwarz, visto que $f \in C^\infty$ e pelo fato de f ser holomorfa. Comparando os resultados inferimos que $\Delta u = 0$ e $\Delta z = 0$. Isto é, as partes real e imaginária de uma função holomorfa são harmônicas.
Naturalmente, podemos indagar: dadas u e v harmônicas, a função complexa $f = u+iv$ é holomorfa? Em geral, a resposta é não. Estudaremos um contra-exemplo para justificá-la rigorosamente.

Exemplo 6. Sejam $U = \mathbb{C}^*$ e $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Dada a simetria no argumento do logaritmo, é fácil mostrar que u é harmônica. Agora suponha que exista v tal que $f = u+iv$ é holomorfa em U. Pelas equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, de onde segue que

$$v(x, y) = \int u_x dy + \phi(x) = 2\arctan(y/x) + \phi(x).$$

Por outro lado, $u_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2} = -v_x = \dfrac{2y}{x^2 + y^2} - \phi'(x)$ implica $\phi(x) =$ constante. Porém, desta forma, v não é contínua em U e, portanto, não é harmônica em U.

Lema 21. *Suponha que $U \subset \mathbb{C}$ é convexo e seja $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{R})$ uma 1-forma fechada. Então ω é exata.*

Demonstração. Seja $\mu : [0, 1]^2 \to U$ um caminho fechado C^1 por partes. Então

$$\int_{\partial\mu} \omega = \int_\mu d\omega = 0.$$

A primeira igualdade é consequência do Teorema de Stokes, enquanto a segunda é devida à hipótese de que ω é fechada. Porém nem todo caminho fechado C^1 por partes é da forma μ, de maneira a não podermos utilizar diretamente o Lema 19 para uma conclusão

do presente resultado. Mas, em particular, note que a igualdade acima é válida para todo triângulo (como na imagem) em U, o que já é suficiente para utilizarmos argumentos análogos àqueles anteriores para demonstração deste. Segue um esboço:
Definimos

$$a(j) = \int_{\gamma_j} \omega,$$

onde γ_j é um de dois lados de um triângulo Δ. Basta escolhermos triângulos cujos terceiros lados estejam em direções convenientes no plano e calcularmos diferenças como aquelas na demonstração do Lema 19 para concluirmos que $\omega = da$, com $a \in C^1$. ■

Corolário 22. *Seja $u : U \to \mathbb{R}$ harmônica, num convexo U. Então existe $v : U \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ é holomorfa em U. A função v é chamada harmônica conjugada de u.*

Demonstração. Por harmonicidade, temos $d * du = 0$. Então a forma $*du$ é fechada no convexo U. Pelo Lema anterior,

$$*du = dv$$

para alguma $v \in C^1$. É imediato da igualdade acima que

$$-u_y dx + u_x dy = v_x dx + v_y dy.$$

Isto é, $v_x = -u_y$ e $u_x = v_y$. Mas estas são as equações de Cauchy-Riemann para $f = u+iv$. Logo, $f \in \mathcal{H}(U)$. ■

De acordo com o corolário, toda função harmônica $u : U \to \mathbb{R}$ é localmente a parte real de uma função holomorfa.

Notas por Pedro B.

4.2 Teorema de Cauchy

Definição 21. Uma forma 1-forma ω em M é dita holomorfa se para todo ponto $p \in M$ existe uma carta (z, B), $p \in B$, tal que a ω em $z(B)$ se escreve como

$$\omega = f dz$$

onde f é holomorfa em $z(B)$.

Teorema 23. *(Cauchy) Se ω é uma forma holomorfa em M então ω é fechada.*

Demonstração. Seja $\omega = f(z)dz$, então

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = 0$$

já que f é holomorfa e $dz \wedge dz = 0$. ■

Como corolário imediato temos o seguinte: se $\eta : I^2 \to M$ é C^1 por partes fechada, então

$$\int_{\partial \eta} \omega = 0.$$

De fato, isso segue do teorema de Stokes. Note que usamos que se f é holomorfa então f é C^1, de fato f é C^∞, uma propriedade que veremos mais tarde.

Uma pergunta intuitiva agora seria, dada uma curva fechada C^1 por partes $f : [a, b] \to M$, e uma 1-forma holomorfa, é verdade que

$$\int_\gamma \omega = 0 \quad ?$$

Caso γ seja o bordo de uma parametrização η isso se confirma, então podemos provar a afirmação acima provando que de fato toda curva fechada é o bordo de alguma parametrização. Isso não é verdade de maneira geral, por exemplo tome um toro pegue a curva que dá a volta em seu buraco. Abaixo mostraremos condições suficientes para que isso seja verdade.

Definição 22. Um espaço topológico X é dito simplesmente conexo se X é conexo por caminhos toda função contínua $f : S^1 \to X$ admite uma extensão para o disco D^2. Em termos de diagramas, existe $\tilde{f}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \nearrow_{\tilde{f}} & \\ D^2 & & \end{array}$$

comuta.

Equivalentemente temos o seguinte lema:

Lema 24. *Uma espaço topológico conexo por caminhos X é simplesmente conexo se, e somente se, para qualquer curva $\gamma : [0, 1] \to X$ existe uma função contínua $H : I^2 \longrightarrow X$ tal que*

(i) $H(t, 0) = z_0$, *onde* $z_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$.

(ii) $H(t, 1) = \gamma(1)$.

(iii) $H(0, s) = H(1, s) = z_0$.

Em outras palavras, qualquer curva com ponto base é homotópica (como caminho) a curva constante nesse ponto base. Além disso, caso $X = U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e γ seja C^1 por partes então H pode ser escolhida para ser C^1 por partes.

A prova do lema acima pode ser feita tomando o quadrado I^2 e o deformando por meio de quocientes de maneira apropriada, já que a homotopia pode ser tomada como C^1 por parte segue do fato que qualquer homotopia entre funções tomando em valores em abertos de $\mathbb{R}^n$ pode ser tomada como uma *homotopia poligonal*. Para mais detalhes veja o Capítulo 2 de [4]. Com esse resultado em mão concluímos o seguinte:

Teorema 25. *Se ω é uma forma holomorfa em U simplesmente conexo, para qualquer curva fechada γ C^1 por partes temos que*

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Demonstração. Considere uma homotopia H que seja C^1 por partes tal que $H_0 = z_0$ e $H_1 = \gamma$, então

$$\int_{\partial H} \omega = \int_{z_0} \omega - \int_{\gamma} \omega = 0.$$

■

Corolário 26. *Se ω é holomorfa em U e U é simplesmente conexo, então ω é exata em U.*

Corolário 27. *$\mathbb{C}^*$ não é simplesmente conexo.*

Demonstração. Tome $\gamma = e^{it}$ onde $t \in [0, 2\pi]$ e $\omega = \frac{1}{z}dz$. ω é holomorfa, já que $\frac{1}{z}$ é holomorfa, porém,

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi i$$

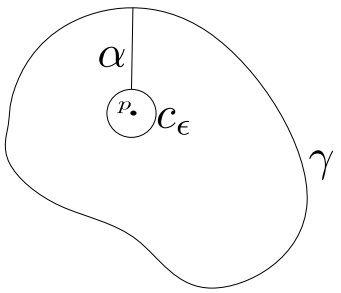
■

Teorema 28. *Seja f holomorfa em $U - \{p\}$, onde U é simplesmente conexo, além disso suponha que*

$$\lim_{z \to p}(z - p)f(z) = 0.$$

Então f possui um potencial holomorfo em U.

Demonstração. Dado $\gamma \subset U - \{p\}$ uma curva C^1 por partes, podemos tomar um círculo c_ε de raio ε centrado em p tal que de maneira que $c_\varepsilon \cap \gamma = \emptyset$. Podemos conectar o círculo a γ com uma curva α como na figura abaixo



Com isso conseguimos a curva fechada

$$\gamma * \alpha * -c_\varepsilon * -\alpha$$

onde o sinal de menos indica a curva com direção trocada. Como U é simplesmente conexo e a curva acima evita p, temos uma homotopia

$$H : I^2 \longrightarrow U - \{p\}$$

entre essa curva e a curva constante em $\gamma(0)$. Assim, já que f é holomorfa em $U - \{p\}$, por Stokes temos que

$$\int_{\partial H} f(z)dz = 0$$

já que $f(z)dz$ é fechada. Note que

$$\int_{\partial H} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{c_\varepsilon} f(z)dz$$

logo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{c_\varepsilon} f(z)dz. \tag{4.2}$$

Sabemos que $c_\varepsilon = p + \varepsilon e^{2\pi it}$ por definição, então

$$\int_{c_\varepsilon} f(z)dz = \int_0^1 f(p + \varepsilon e^{2\pi it})\varepsilon 2\pi i t \; dt$$

de modo que

$$\left| \int_{c_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq 2\pi\varepsilon \max_{z\in D(p,\varepsilon)} |f(z)|$$

Pelas nossas hipóteses quando $\varepsilon \to 0$, o lado direito da desigualdade acima também tende a zero. Como a equação 4.2 vale para qualquer ε, concluímos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Como γ era uma curva qualquer temos que f possui um potencial holomorfo. ■

Notas por Victor J.

4.2.1 Fórmula de Cauchy

Começamos introduzindo o conceito de índice de uma curva em relação a um ponto, para isso introduziremos a notação:

$$PC^1 := \{\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{R},\ \gamma\ C^1 \text{ por partes}\}.$$

Definição 23. Dado um caminho $\gamma \in PC^1$, seja $p \in \mathbb{C}$ tal que $p \notin \gamma$ um ponto fora do caminho γ, definimos o índice de γ em respeito a p como:

$$\eta_\gamma(p) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-p} dz.$$

Basicamente, o índice diz quantas voltas o caminho "completa"ao redor de p, para entender melhor tomemos $\gamma \in PC^1$ um caminho fechado e parametrizável da forma

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)},$$

com $r : [0,1] \to \mathbb{R}_{>0}$, $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Temos que $0 \notin \gamma$, podemos tomar o índice de γ na origem:

$$\begin{aligned}
\eta_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{r'(t)}{r(t)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \theta'(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} ln(r(t)) \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0)).
\end{aligned}$$

Como γ é fechado, $r(1) = r(0)$ e o primeiro termo se anula, além disso $\theta(1) - \theta(0) = 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\eta_\gamma(0) = k$ representa o numéro de voltas que a curva dá ao redor de 0. Podemos estender este conceito para qualquer caminho, para isto mostraremos primeiro o Lema:

Lema 29. *$\eta_\gamma : \mathbb{C}\backslash\gamma \to \mathbb{C}$ é contínua.*

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned}\eta_\gamma(p) - \eta_\gamma(x) &= \int_\gamma (F(z,p) - F(z,x))dz \\ &= \int_a^b \gamma'(t)(F(\gamma(t),p) - F(\gamma(t),x))dt\end{aligned}$$

onde $F : \gamma \times \mathbb{C}\backslash\gamma \to \mathbb{C}$ é contínua. Como γ é um caminho C^1 compacto, podemos calcular seu deslocamento $\gamma(b) - \gamma(a) = D(\gamma)$.

Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de F e compacidade de γ, existe $\delta > 0$ tal que $|p - x| < \delta$ implica $|F(\gamma(t),p) - F(\gamma(t),x)| < \epsilon/D(\gamma)$ para todo $t \in [a,b]$ Com algumas manipulações temos o resultado. ■

Com isto, podemos caracterizar o índice θ para qualquer caminho arbitrário.

Proposição 30. *Para todo caminho $\gamma \in PC^1$ fechado, temos que $\eta_\gamma(p) \in \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{C}\backslash\gamma$.*

Demonstração. Definimos a função $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds\right),$$

de forma que $g(0) = 1$ e $g(1) = \exp(2\pi i \eta_\gamma(p))$. De fato, g é diferenciável e

$$g'(t) = g(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p} \Rightarrow g'(t)(\gamma(t) - p) - g(t)(\gamma - p)'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\gamma - p}\right)'(t) = 0, \ \forall\ t \in [0,1].$$

Assim, a função $\frac{g(t)}{\gamma(t)-p}$ é constante, logo:

$$\frac{g(0)}{\gamma(0) - p} = \frac{g(1)}{\gamma(1) - p},$$

o que, como $\gamma(1) = \gamma(0)$, implica $1 = g(0) = g(1) = \exp(2\pi i \eta_\gamma(p))$. Concluímos pelas características da exponencial, $\eta_\gamma(p) \in \mathbb{Z}$ ■

Corolário 31. *$\eta_\gamma(p)$ é constante em componentes conexas de $\mathbb{C}\backslash\gamma$.*

Com efeito, η_γ é uma função contínua em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 7. Se γ, μ são caminhos fechados, teremos:

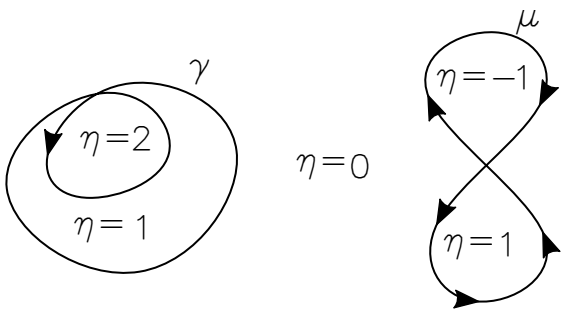


Figura 4.1: Número de voltas em cada componente de $\mathbb{C}\backslash\gamma$ e $\mathbb{C}\backslash\mu$

.

Exemplo 8. Seja $\gamma \in PC^1$ uma curva de Jordan (homeomorfa a S^1), então γ divide o plano em duas componentes conexas. Teremos, $\eta_\gamma(p) = 0$ para todo p na componente ilimitada e $\eta_\gamma(p) \in \{-1, 1\}$ para p na componente limitada, sendo negativa ou positiva de acordo com a orientação da curva.

Podemos, agora, definir a fórmula de Cauchy.

Teorema 32. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo, $\gamma \in PC^1$ contido em U, e $f : U \to \mathbb{C}$ função em $H(U)$ qualquer. Teremos para todo $p \in U\backslash\gamma$:*

$$f(p)\eta_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz. \tag{4.3}$$

Demonstração. Substituindo o valor de $\eta_\gamma(p)$, com algumas manipuçãoes podemos ver que a Fórmula de Cauchy é equivalente a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(p)}{z-p}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}dz,$$

isto é:

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(p)}{z-p}dz = 0.$$

Definimos então $g : U \to \mathbb{C}$ como $g(z) = \frac{f(z)-f(p)}{z-p}$ para $z \neq p$ e $g(p) = f'(p)$. Teremos por construção que g é contínua em U e holomorfa em $U\backslash\{p\}$. Assim que pelo Teorema 28 temos:

$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$

o que conclui a prova. ■

Note ainda que g como definida acima possui potencial holomorfo em U.

Notas por Igor Soares

4.3 Funções Analíticas

Definição 24. (Série de Potências)

A **série de potências** de centro a e coeficientes $(a_n)_n$, onde $a, a_n \in \mathbb{C}$ é definida como a série formal:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

A princípio a série é um objeto algébrico formal, não está relacionado com funções, para fazer tal relação precisamos definir convergência.

Definição 25. (Convergência)

Dizemos que $S(z)$ **converge** no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ se existe o limite:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{k} a_n (z_0 - a)^n}_{S_k(z_0)} = L \in \mathbb{C}$$

Nesse caso escrevemos $S(z_0) = L$

Observação. $S(z)$ sempre converge em a.

Definição 26. (Convergência Absoluta)

Diremos que $S(z)$ **converge absolutamente** em z_0 se o seguinte limite existe:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=0}^{k} |a_n (z - z_0)^n|$$

Uma série de potencias define bem uma função nos pontos onde $S(z)$ converge, por isso queremos compreender o conjunto desses pontos.

Lema 33. *(Abel) Se $S(z)$ converge em z_0 então $S(z)$ converge absolutamente para todo z tal que $|z-a| < |z_0 - a|$*

Demonstração.

$$|a_n (z-a)^n| = |a_n (z - 0 - a)^n| \underbrace{\left| \frac{(z-a)^n}{(z_0 - a)^n} \right|}_{r^n}$$

Pela hipótese $|z-a| < |z_0 - a| \implies r < 1$.

Como a série converge em z_0, a sequência $|a_n (z_0 - a)^n| < M$, onde $M > 0$.

Assim :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z_0 - a)^n| \, r^n < \sum_{n=0}^{\infty} M r^n \leq \frac{M}{1-r}$$

■

Observação.

- Se $S(z)$ converge absolutamente em z_0 então converge em Z_0

- A recíproca é falsa, um contra-exemplo é a série $\sum(-1)^n 1/n$, que converge absolutamente para $\log(2)$ mas a série dos módulos é série harmônica que diverge.
- Pode acontecer que a série convirja somente no centro, como $\sum_n n!z^n$, converge em $z = 0$, mas para todo número a positivo $n!a^n$ não converge, logo pelo lema de Abel não pode convergir em nenhum ponto com $|z| > 0$.

Podemos considerar sem perda de generalidade que $S(z) = \sum_n a_n z^n$, ou seja, que o centro é zero.

Considere $R = \sup\{x \in \mathbb{C} \big| S(z) \text{ converge em } x\}$

Assim $R \in [0, +\infty]$

então temos três casos:

- $R = 0$, nesse caso a série converge apenas no centro e não tem nenhuma graça.
- $R = +\infty$, nesse caso pelo lema de Abel $\forall x \in \mathbb{C}$, $S(z)$ converge absolutamente em x.
- $R \in (0, \infty)$

  Então $S(z)$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < R$ pelo lema de Abel.

  Além disso, $S(z)$ diverge para todos x tal que $|x| > R$, caso contrário pelo lema de Abel teríamos um z_0 de forma que $R < |z_0| < x$ onde $S(z)$ converge em z_0 o que contradiz a maximalidade de R.

Definição 27. (Raio de convergência) R como acima é dito **raio de convergência** da série.

Lema 34.

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Observação. Por convenção, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$

Demonstração. Vamos escrever $b_n(z) = |a_n(z-a)^n|$, podemos ver que $b_n(z) \geq 0$, pelo teste da raíz:

$$\limsup \sqrt[n]{b_n(z)} < 1 \implies \text{convergência em } z$$
$$\limsup \sqrt[n]{b_n(z)} > 1 \implies \text{divergência em } z$$

Como $\sqrt[n]{b_n(z)} = \sqrt[n]{a_n} \cdot |z-a|$ podemos reescrever as implicações acima:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n}(z-a) < 1 \implies \text{convergência em } z$$
$$\limsup \sqrt[n]{a_n}(z-a) > 1 \implies \text{divergência em } z$$

Como $|z-a|$ não depende de n:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{(z-a)} \implies \text{convergência em } z$$

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > \frac{1}{(z-a)} \implies \text{divergência em } z$$

Logo $R = \limsup \sqrt[n]{a_n}$ ■

Corolário 35. *Se existe o limite*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = L \in \mathbb{R}$$

Então o raio de convergência é $R = L$

Demonstração. Exercício. ■

Exemplos:

1. $$S(z) = \sum_n \frac{z^n}{n} \implies R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/n}} = 1$$

   Para $|z| = 1$ podem acontecer coisas distintas,

   $\sum_n (-1)^n/n$ converge, porém $\sum_n 1/n$ diverge

2. $$S(z) = \sum_n \frac{z^n}{n^2} \implies R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/n}} = 1$$

   Mas nesse caso converge absolutamente para todos $|z| = 1$.

3. $$S(z) = \sum_n \frac{z^n}{n!} \qquad \text{Converge absolutamente para todo } z \in \mathbb{C} \ .$$

Notas por Bruno O.

Lema 36 (Teste M de Weierstrass)**.** *Sejam* $f_n : X \to E$, $n \in \mathbb{N}$, *funções complexas num espaço de Banach* E. *Se existe uma sequência de números não negativos* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ *para todo* n, *com* $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$, *então existe o limite*

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{N=0}^{n} f_N(x)$$

para todo $x \in X$. *Além disso,* $\|S\|_\infty < \infty$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{N=0}^{n} \|f_n - S\|_\infty = 0.$$

O Lema anterior se mostra essencial na demonstração de continuidade de uma série de potências, a seguir.

Proposição 37. *Seja* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *uma série de potências cujo raio de convergência é* $R > 0$*. Isso faz de* S *uma função do disco* $\mathbb{D}(a,R)$ *para os números complexos. Afirmamos que as somas parciais* $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-a)^n$ *convergem uniformemente para* S *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{D}(a,R)$*. Disto podemos concluir que* S *é contínua.*

Demonstração. Sejam r, s tais que $0 < r < s < R$. Definimos $\bar{K} = \mathbb{D}(a,r)$ e tomamos $z \in K$. Então $|a_n(z-a)^n| < |a_n|\, s^n$. Além disso, dado que s é menor que o raio de convergência da série, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, s^n < +\infty$. As hipóteses do teste de Weierstrass forma satisfeitas. Segue do mesmo que

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-a)^n|_K \to S,$$

conforme $N \to \infty$. Como as somas parciais são contínuas e K é compacto, a convergência é uniforme. ■

4.3.1 Derivadas de Séries de Potência

Nota. Sem perda de generalidade, consideraremos que o raio de convergência R de toda série de potências é positivo.

Considere uma série $S : \mathbb{D}(a,R) \to \mathbb{C}$ tal que $S(z) = \lim_{N=0}^{\infty} S_N(z)$. Como polinômios, afirmamos que as somas parciais $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-a)^n$ são holomorfas no disco e suas derivadas são

$$S'_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot n(z-a)^{n-1}.$$

Naturalmente, a candidata para derivada da série S é

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(z-a)^{n-1},$$

cujo raio de convergência é $R_G = 1/\limsup_n(|a_n|n)^{\frac{1}{n}} = R$, já que $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ quando $n \to \infty$. Pela Proposição (37), $G : \mathbb{D}(a,R) \to \mathbb{C}$ é contínua.

Afirmação 2. Existe a derivada S' da série de potências $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ e $S' = G$, como definida acima.

Antes de partirmos para a demonstração da afirmação, visitaremos mais um lema.

Lema 38. *Seja* $(f_n)_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(0,1))$ *uma sequência de funções tais que*

1. *f_n' é contínua para todo n;*
2. *existe $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$;*
3. *f_n' convergem uniformemente para alguma g em compactos do disco.*

Então existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ para todo z e $f' = g$.

Demonstração. Defina $f(z) := \int_{\overrightarrow{0z}} g(\omega)d\omega + L$, em que $L = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$. Seja γ um caminho fechado em $\mathbb{D}$. Temos que

$$\int_\gamma g(\omega)d\omega = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n'(\omega)d\omega = 0.$$

A primeira igualdade segue da hipótese de convergência uniforme de f_n'. Segue que g possui potencial holomorfo que coincide com f, pode definição desta última. Isto é, $f'(z) = g(z)$ para todo z no disco. Por outro lado, temos trivialmente

$$f_n(z) - f_n(0) = \int_{\overrightarrow{0z}} f_n'(\omega)d\omega \iff \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{\overrightarrow{0z}} f_n'(\omega)d\omega + L = f(z).$$

■

Agora temos a ferramenta necessária para demonstração da Afirmação (2):

Demonstração. Sabemos da continuidade de S_N' e da existência do limite $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n$. Além disso, pela proposição (37), S_N' converge uniformemente para G em compactos do disco. O Lema anterior nos dá o resultado desejado. ■

Sumarizando, provamos o resultado a seguir:

Proposição 39. *Suponha que $S : \mathbb{D}(a, R) \to \mathbb{C}$ é dada por uma série de potências*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Então S é de classe C^∞ e

$$S^{(r)}(z) = \sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)\dots(n-r+1)a_n(z-a)^{n-r}.$$

Em particular, os coeficientes da expansão de $S(z)$ são unicamente determinados:

$$S^{(r)}(a) = r!a_r \implies \boxed{a_r = \frac{S^{(r)}(a)}{r!}}.$$

4.3.2 Funções Analíticas

Definição 28. Seja $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ um conjunto aberto. Dizemos que uma função $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ é analítica se, para todo $a \in U$ existe $\mathbb{D}(a, R) \subset U$ $(R = R(a) > 0)$ tal que $f|_{\mathbb{D}(a,R)}$ é dada por uma série de potências.

Denotaremos o conjunto de funções analíticas em U por $C^\omega(U)$. Pela proposição (39), concluímos que $C^\omega(U) \subset C^\infty(U)$. É importante ressaltarmos, porém, que a recíproca não é verdadeira, em geral.

Exemplo 9. Seja $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x = 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ É verdade que $f \in C^\infty$. Mas não pode ser escrita como uma série de potências em torno de $x = 0$. De fato, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n, o que implicaria $f \equiv 0$ numa vizinhança de 0, o que não se verifica. Logo, $f \notin C^\omega$, que nos permite concluir $C^\omega \not\subset C^\infty$.

Notas por Pedro B.

Agora mostraremos que toda função holomorfa é analítica. Primeiramente, precisamos do Lema de Goursat, uma versão mais fraca do Teorema de Cauchy que nos permitirá usar a fórmula de Cauchy sem a hipótese de que uma função holomorfa seja C^1, o que temos utilizado até então.

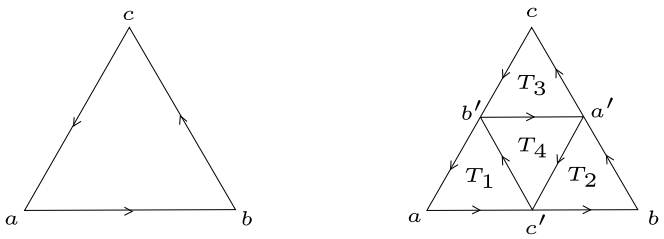
Teorema 40. *Seja $D^2 \subset \mathbb{C}$ o disco aberto centrado em 0 e $f : D^2 \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $\Delta \subset D$ é um triângulo, então*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Demonstração. Sejam $a, b, c \in D^2$ os vértices do triângulo Δ, vamos construir indutivamente uma sequência de triângulos encaixados Δ_n tais que

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|$$

Seja a' o ponto médio do lado $\overrightarrow{cb}$, b' o de $\overrightarrow{ca}$ e a' o de $\overrightarrow{bc}$, vemos que o triângulo $\overrightarrow{a'b'c'}$ divide o triângulo Δ em 4 triângulos menores T_1, T_2, T_3 e T_4.



Seja $I = \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|$, e observe que

$$I \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial T_i} f(z)dz\right|$$

e portanto existe i tal que

$$\left|\int_{\partial T_i} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}I.$$

Assim, o primeiro elemento de nossa sequência será $\Delta_1 = T_i$. Agora, pelo mesmo procedimento, dado o elemento Δ_n, construímos Δ_{n+1}, e verificamos

$$\left|\int_{\partial \Delta_{n+1}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial \Delta_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^{n+1}}\left|\int_{\partial \Delta} f(z)dz\right|.$$

Por construção temos que

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots.$$

Denote por $\operatorname{per}\Delta_n$ o perímetro de Δ_n e por $\operatorname{diam}\Delta_n$ o diâmetro, logo

$$\operatorname{diam}\Delta_n \leq \operatorname{per}\Delta_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{per}\Delta$$

logo

$$\operatorname{diam}\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e portanto

$$\bigcap_n \Delta_n = \{p\}.$$

f é holomorfa em p e em particular possui derivada em p, logo podemos escrever f como

$$f(z-p) = f(p) + f'(p)(z-p) + o(|z-p|).$$

Denotando $\varphi(z) = o(|z-p|)$, pela definição de derivada temos que

$$\left|\frac{\varphi(z)}{(z-p)}\right| \xrightarrow[z\to p]{} 0.$$

Agora podemos escrever

$$\left|\int_{\partial \Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial \Delta_n} f(p) + f'(p)(z-p) + \varphi(z)dz\right|$$

e como $f(p) + f1(p)(z-p)$ é um polinômio, sua integral num caminho fechado é zero, logo

$$\left|\int_{\partial \Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial \Delta_n} \varphi(z)dz\right| \leq \max_{z\in\Delta_n}|\varphi(z)| \cdot \operatorname{per}\Delta_n = \max_{z\in\Delta_n}|\varphi(z)| \cdot \frac{1}{2^n}\operatorname{per}\Delta$$

Sendo $\|\varphi\|_n = \max_{z\in\Delta_n}|\varphi(z)|$, de

$$|I_n| \geq \frac{1}{4}I$$

concluímos que vale

$$I \leq \|\varphi\|_n \cdot 2^n \operatorname{per}\Delta$$

para todo n. Logo se mostramos que $\|\varphi\|_n \cdot 2^n$ tende a zero, o resultado estará provado. Para enxergar isso note que para $z \in \Delta_n$

$$|z-p| \leq \operatorname{diam}\Delta_n \leq \frac{1}{2^n}\operatorname{per}\Delta$$

logo, pela definição de derivada

$$\frac{\varphi(z)}{1/2^n} \longrightarrow 0$$

■

Com o resultado acima podemos provar a fórmula de Cauchy sem necessitar de que uma função holomorfa seja C^1. Qualquer polígono convexo pode se divide em triângulos, e o teorema acima então mostra que o resultado vale trocando triângulos por polígonos, e assim, curvas que são aproximadas por polígonos (como o círculo), também servem no resultado acima. Assim, com essa discussão, estamos pontos para provar o seguinte:

Teorema 41. *Se f é holomorfa em U então f é analítica em U.*

Demonstração. Seja $p \in U$, tome $\overline{D(p,r)} \subset U$ um disco fechado contendo p. Seja γ a curva que dá a volta um vez no bordo desse disco, então sabemos que

$$\eta_\gamma(z) = 1$$

para todo z no interior do disco. Logo, pela fórmula de Cauchy temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-p}dw$$

Podemos desenvolver essa equação

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-p-(z-p)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-p}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-p}{w-p}}dw \end{aligned}$$

Como vamos integrar no bordo do disco, temos que $|z-p| \leq r$ e $|w-p| = r$, logo $|\frac{z-p}{w-p}| < 1$, assim podemos abrir a série geométrica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z-p}{w-p}^n dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw\right)(z-p)^n$$

onde na segunda igualdade estamos usando o fato de que a integral "passa para dentro"quando a convergência é uniforme em compactos. Assim escrevemos f como uma série de potências numa vizinhança de um ponto p arbitrário. ■

Corolário 42. *Se f é holomorfa em U então f é de classe C^∞ em U.*

Esse teorema é fundamental na teoria das equações holomorfas e ilustra o quão forte é exigir a validade das equações de Cauchy-Riemann. Note, que esse teorema também nos dá uma caracterização da das derivadas de uma função holomorfa, explicitamente temos

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw$$

já que

$$a_n = f^{(n)}(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}.$$

4.3.3 Aplicações

Agora veremos diversas aplicações da analiticidade das funções holomorfas.

Corolário 43 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Seja $f \in \mathcal{H}(U)$, $p \in U$ e $r < d(p, \partial U)$, então*

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\gamma_r}$$

Demonstração.

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \left| \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} \right| dw = \frac{1}{2\pi i r^{n+1}} \int_\gamma |f(w)| dw.$$

■

Corolário 44 (Morera)**.** *Se $f \in C^0(U)$ é tal que*

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

para todo triângulo, então $f \in \mathcal{H}(U)$.

Demonstração. Tomando um disco em $D \subset U$ vemos que

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

para toda $\gamma \subset D$, então f possui um potencial holomorfo então f é holomorfa. ■

Corolário 45 (Liouville)**.** *Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Se f é limitada então ela é constante.*

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy, para $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \leq \frac{\sup |f|}{r}$$

para todo r, e como f é limitada, $f'(z) = 0$, basta fazer $r \to \infty$. ■

Proposição 46 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Se $p \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio não constante então f tem uma raiz em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Suponha que p não possua raízes, então

$$f = \frac{1}{p}$$

é holomorfa. Sabemos que $|p(z)| \to \infty$ quando $|z| \to \infty$, então f é uma função holomorfa limitada definida em $\mathbb{C}$, portanto constante pelo Teorema de Liouville, porém f constante implica p constante, uma contradição. ■

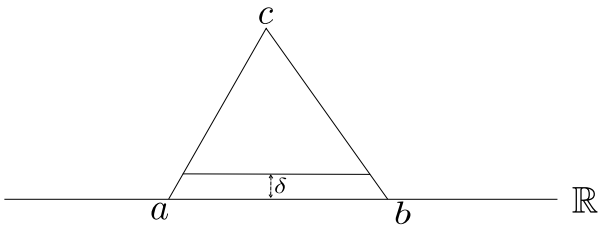
Corolário 47 (Princípio da Reflexão de Schwartz)**.** *Seja $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Se $f : \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua que seja holomorfa em $\mathbb{H}^+$ tal que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, então f se estende a uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Defina $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{R} \\ \overline{f(\bar{z})}, z \in \mathbb{H}^- \end{cases}$$

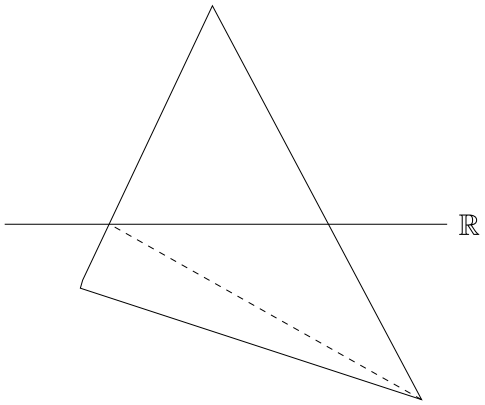
claramente F estende f, basta mostrar que essa função é holomorfa, para isso usaremos o Teorema de Morera. Primeiro note que $F \in C^0(\mathbb{C})$ já que essas funções concordam em $\mathbb{R}$.

Para um triângulo Δ qualquer em $\mathbb{C}$, se $\Delta \subset \mathbb{H}^+$ ou $\Delta \subset \mathbb{H}^-$ a integral de F em seu bordo vale zero. O problema está no caso em que $\Delta \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suponha que interseção de Δ com $\mathbb{R}$ seja exatamente um dos lados do triângulo.



Assim podemos separar o triangulo trapézio de altura δ e um triângulo que não intersecta $\mathbb{R}$. Desse modo, a norma integral de F em $\partial\Delta$ é menor sua integral nesse trapézio, já que no triângulo menor ela é vale zero, logo fazendo $\delta \to 0$ essa integral é zero.

Para o caso geral podemos partir o triângulo de modo a cair no caso anterior



e assim, pelo teorema de Morera, F é holomorfa em $\mathbb{C}$. ■

Capítulo 5

A Estrutura das Funções Holomorfas

5.1 Zeros de Funções Holomorfas

Notas por Victor J.

Com o que já foi discutido até agora, podemos começar a deduzir algumas propriedades das funções holomorfas. Consideramos uma função $f \in \mathcal{H}(U)$, onde $U \subset \mathbb{C}$ aberto. Definimos o conjunto de zeros da função:

$$Z(f) := \{p \in U \mid f(p) = 0\}.$$

Note que $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ é pré-imagem de um conjunto fechado por uma função contínua e portanto é fechado.

Como $f \in \mathcal{H}(U)$, dado $p \in Z(f)$, existe algum $R > 0$, tal que para $z \in D(p, R)$, podemos escrever f como a série de potências

$$f(z) = a_0 + a_1(z-p) + \cdots + a_n(z-p)^n + \cdots,$$

onde $a_0 = f(p) = 0$. A partir daqui, temos duas possibilidades:

- ou $a_n = 0$ para todo natural n, neste caso $f|D(p, R) \equiv 0$;
- ou p é um zero isolado da função f. Isto porque existe um natural mínimo $N \geq 1$ tal que $a_N \neq 0$,i.e., $f^{(N)}(p) \neq 0$. Neste caso, para $z \in D(p, R)$, teremos:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_N(z-p)^N + a_{N+1}(z-p)^{N+1} + \cdots \\ &= (z-p)^N \left(a_N + a_{N+1}(z-p) + \cdots\right) \\ &= (z-p)^N h(z), \end{aligned}$$

com $h : D(p, R) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $h(p) = a_N \neq 0$.

Podemos estender h para U definindo $h : U \to \mathbb{C}$ como:

$$h(z) = \begin{cases} a_N + a_{N+1}(z-p) + \cdots & \text{, se } z \in D(p.R) \\ \frac{f(z)}{(z-p)^N} & \text{, se } z \notin U \backslash D(p, R), \end{cases}$$

teremos $h \in \mathcal{H}(U)$ e $f(z) = (z-p)^N h(z)$ para todo $z \in U$, com $h(p) \neq 0$. Podemos, então encontrar um $r > 0$ tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in D(p, r)$ e $D(p, r) \cap Z(f) = \{p\}$. Logo p é um zero isolado da f.

Lembramos, dado X espaço topológico métrico e um conjunto $A \subset X$, o conjunto de pontos de acumulação de A é definido como:

$$A' := \{x \in X \mid \forall\ \epsilon > 0\ \#(A \cap D(x, \epsilon)) \geq 2\ (= \infty)\}.$$

É imediato que A' é fechado.

Teorema 48. *(Teorema dos Zeros) Seja U é um domínio (aberto e conexo), $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que o conjunto de pontos de acumulação $Z(f)' \neq \emptyset$, então $f \equiv 0$ em U.*

Demonstração. Ja sabemos que $Z(f)'$ é fechado, mostraremos que $Z(f)'$ é aberto em U e por ser não vazio, teremos $Z(f)' = U$.

De fato, dado $p \in Z(f)'$, existem $(x_n)_n \to p$ tal que $f(x_n) = 0$ para todo n, como f é contínua temos $f(p) = 0$, isto é $p \in Z(p)$. Por ser ponto de acumulação, p não pode ser zero isolado de f e portanto o que nos leva ao primero caso (existe $r > o$ tal que $f \equiv 0$ em $D(p, r) \subset U$), temos $D(p, r) \subset Z(f)$, oque nos leva ao resultado. ■

Observação. Os resultados a seguir são imediatos do Teorema dos Zeros:

- Se U é dominio e f não nula é holomorfa em U, então $Z(f)$ é enumerável.
- Se f e g são analíticas e coincidem em um conjunto com ponto de acumulação, então $f = g$.

Definição 29. Dada uma função holomorfa f não nula e $p \in Z(f)$, definimos a ordem de f em p como:

$$ord_p(f) := \min\{n\ :\ f^{(n)}(p) \neq 0\}.$$

De fato, se $f(z) = (z - p)^N h(z)$ como feito anteriormente temos $N = ord_p(f)$. Tomando $R > 0$ tal que $h(z) \neq 0$ em $D(p, R)$, para $r < R$ consideramos γ_r o caminho circular de centro p e raio r, teremos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_r} \frac{h'(z)}{h(z)}dz + \int_{\gamma_r} \frac{N}{z-p}dz\right) = N,$$

pois h'/h é holomorfa em U. Portanto:

$$ord_p(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \eta_{f\circ\gamma_r}(0), \tag{5.1}$$

isto é, a ordem de f em p equivale ao número de voltas completas por $f \circ \gamma_r$ em torno de 0, sendo esta igualdade obtida pelo Teorema de mudança de variáveis.

5.1.1 Logaritmo e Raízes

Definição 30. Seja $f \in \mathcal{H}(U)$ não nula. Dizemos que f possui um logaritmo holomorfo $g \in \mathcal{H}(U)$ se $e^{(g(z)} = f(z)$ para todo $z \in U$.

Note que neste caso $f' = g'e^g = g'f$, portanto $f'/f = g'$ possui potencial holomorfo.

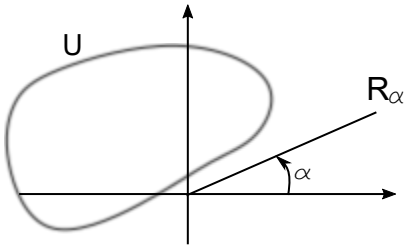
Reciprocamente, se existe $g \in \mathcal{H}(U)$ tal que $f'/f = g$, então vale que $(fe^{-g})' = 0$, portanto se U é domínio concluímos $fe^{-g} = k$ constante, com $k \neq 0 \in \mathbb{C}$ pois assumimos $f \neq 0$. Logo, $k = e^c$ para algum $c \in \mathbb{C}$, temos $f(z) = e^{g(z)+c}$, e portanto f possui logaritmo holomorfo. Com isto, provamos o seguinte teorema.

Teorema 49. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f \in \mathcal{H}(U)$ não identicamente nula. Então f possui logaritmo holomorfa se, e somente se, $\int_\gamma f'/f = 0$ para todo γ caminho fechado em U.*

Com efeito, pelo Corolário 20, f'/f possui potencial holomorfo.

Observação. Se $f \in \mathcal{H}(U)$ possui logaritmo holomorfo, então para todo natural n f possui uma raiz n-ésima holomorfa, isto é, uma função $h \in \mathcal{H}(U)$ tal que $h^n = f$. De fato, $f = e^g$, $h = e^{g/n}$.

Exemplo 10. Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um domínio simplesmente conexo, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o raio $R_\alpha = \{te^{i\alpha},\ t \geq 0\}$ não intersecta U.



Temos então que a função $z \mapsto z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp\left(i \cdot \frac{Arg_\alpha(z)}{n}\right)$ é holomorfa em U. Com efeito, a identidade $z = \exp\left(ln(|z|) + iArg_\alpha(z)\right)$ possui logaritmo holomorfo.

Observação. O recíproco não é verdadeiro, isto é, existem funções que possuem alguma raiz holomorfa, mas não possuem logaritmos holomorfos. Como exemplo, tome $f(z) = z^2$ no domínio $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, claramente $h(z) = z$ é raiz quadrada para f, mas para um caminho fechado γ ao redor de zero temos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2}{z}dz = 2,$$

e portanto, pelo Teorema 49 f não possui logaritmo holomorfo.

5.1.2 Forma Local de Funções Holomorfas

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f \in \mathcal{H}(U)$ uma função não contante. Para $p \in U$, seja $c = f(p)$ e $N = ord_p(f - c)$, N é finito uma vez que f é não constante. Temos, para algum $R > 0$, $z \in D(p, R)$:

$$f(z) = c + (z - p)^N h(z),$$

onde $h \in \mathcal{H}(U)$ satisfaz $h(z) \neq 0$ para todo $z \in D(p, R)$. Como $D(p, R)$ é um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{C}^*$, pelo Exemplo 10 existe uma $g \in \mathcal{H}(D(p, R))$ tal que $g^N = h$, então para $z \in D(p, R)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= c + [(z - p)g(z)]^N \\ &= c + \varphi_N \circ S(z), \end{aligned}$$

onde $\varphi_N(z) := z^N$, e $S(z) = (z - p)g(z)$. Note que $S'(p) \neq 0$, pois $h \neq 0$ em $D(p, R)$. Com isso, pelo Teorema 12, podemos reduzir $R > 0$, de forma que S é bi-holomorfa em $D(p, R)$, temos:

Teorema 50. *(Forma Local de Funções Holomorfas) Seja $f \in \mathcal{H}(U)$, U domínio. Dado $p \in U$, existe $D(p,R)$, um natural $N \geq 1$ e uma $S \in \mathcal{H}(D(p,R))$ bi-holomorfa tais que:*

$$f(z) = f(p) + \varphi_N \circ S(z) \quad \text{, para } z \in D(p,R).$$

Temos portanto:

$$\begin{array}{ccc} D(p,R) & \xrightarrow{f} & f(D(p,R)) \\ \downarrow{\scriptstyle S(z)} & & \downarrow{\scriptstyle L(-f(p)):z\mapsto z-f(p)} \\ S(D(p,R)) & \xrightarrow[\varphi_N]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

Observação. φ_N é aberta.

Demonstração. Para $p \neq 0$, pelo Teorema 12, φ_N é bi-holomorfa em uma vizinhança de p, logo localmente aberta. Para $p = 0$, temos $\varphi_N(D(0,r)) = D(0,r^N))$, logo localmente aberta. Assim, φ_N é localmente aberta em todo ponto, logo é aberta. ■

O seguinte corolário é imediato da Forma Local das Funções Holomorfas.

Corolário 51. *(Teorema da Aplicação Aberta) Seja $f \in \mathcal{H}(U)$, U domínio. Ou f é constante, ou é aberta.*

Corolário 52. *U domínio e $f \in \mathcal{H}(U)$ injetora, então $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, logo f é conforme.*

Com efeito, para todo $p \in U$, temos $f(z) - f(p) = +\varphi_N \circ S(z)$ para alguma vizinhança de p, oque implica que φ_N possui uma única raiz simples, portanto $N = 1$. Como $N = ord_p(f - f(p))$, temos $f'(p) \neq 0$.

O Corolário a seguir pode ser facilmente deduzido pelo fato de uma função holomorfa ser constante ou aberta.

Corolário 53. *U domínio, $f \in \mathcal{H}(U)$ não constante. Então $|f|$ não possui máximos estritos locais.*

Observação. Seja f holomorfa em um domínio U tal que existe uma extensão contínua de f para $\bar{U}$, sendo o fecho $\bar{U}$ compacto. Então:

$$\max_{z \in U}\{|f(z)|\} = \max_{z \in \partial U}\{|f(z)|\},$$

isto é, seu máximo está na fronteira de U. Este resultado é imediato do corolário anterior.

5.2 Singularidades

Notas por Igor S.

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto (normalmente um domínio , i.e. aberto e conexo) e uma função $f : U \to \mathbb{C}$. Podemos definir oque é uma singularidade

Definição 31. (Singularidade) Seja ($a \in U$) é uma **Singularidade isolada** de f se f é holomorfa fora de a, $f \in H(U - \{a\})$.

Por exemplo $1/z$ tem uma singularidade em $z = 0$.

Observação. (Singularidade Removível) Se a é singularidade de f e $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$, então f pode ser estendida para o ponto a de uma única forma holomorfa. Dizemos nesse caso, que a singularidade é removível.

Demonstração. Se temos esta condição, já mostramos que $\int_{\partial\Delta} f = 0$, onde $\partial\Delta$ é um triângulo qualquer pequeno o suficiente, então existe uma $g \in H(U)$ de forma que $g'(z) = f(z)\ \forall z \neq a$, e define $f(a) = g'(a)$ como queríamos a função será continua nesse ponto. ■

Notação: $\mathcal{S}_f(U) = \{a \in U | a$ é singularidade não removível de $f\}$

Suponha que $a \in \mathcal{S}_f(U)$, uma singularidade de f, vamos analisar uma caso particular, onde existe um polinômio $p(z)$ de grau M, que respeita $ff(z) - p(\frac{1}{(z-a)})$ tem uma singularidade removível em a, nesse caso podemos afirmar que: $f(z) - p(\frac{1}{z-a}) = f(z) - \underbrace{a_{-1}/(z-a) + a_{-2}/(z-a)^2 + \ldots + a_{-M}/(z-a)^M}_{R(z;a)}$ tem uma singularidade removível no ponto a,

Por exemplo a função $f(z) = 1/z + z^2$, quando se soma com o polinômio $p(z) = z$, então $f(z) - p(1/z) = 1/z + z^2 - 1/z = z^2$.

Definição 32. (Polo) Nesse caso, dizemos que a é um polo de ordem M de f, (notação: $a \in P(f)$ ou $a \in P_f$) , esse polinômio $R(z;a)$ é chamado de parte principal de f em a e os coeficientes a_{-i} são chamados de resíduos em a.

Notação:

$a_{-1} = res_a(f)$, para a ordem do polo temos a notação $M = ord_a(f)$.

Observe que se a é um polo de ordem M então $h(z) = f(z) - R(z;a)$ é holomorfa perto de a, além disso:

$$R(z;a) = \frac{1}{(z-a)^M}\left(a_{-1}(z-a)^{M-1} + \ldots + a_{-M}\right) = \frac{Q(z)}{(z-a)^M}$$

Onde Q é um polinômio, de forma $Q(a) \neq 0$, assim podemos concluir:

$$f(z) = \frac{(z-a)^M h(z) + Q(z)}{(z-a)^M} = \frac{g(z)}{(z-a)^M}$$

Com g holomorfa em uma vizinhança de a e $g(a) \neq 0$

De forma recíproca:

Teorema 54. *Suponha que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ onde, $g, h \in H(U)$, $h \not\equiv 0$, além disso $M = ord_a(h)$ como um zero.*

Então, f tem um polo de ordem M no ponto a.

Demonstração. É imediato que a é uma singularidade de f.

podemos escrever $h(z) = (z-a)^M h_1(z)$, onde $h_1(z) \in H(U)$ e $h_1(a) \neq 0$ oque implica que $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{(z-a)^M}\frac{g(z)}{h_1(z)}$, mas a função $\frac{g(z)}{h_1(z)} = g_1(z)$ é holomorfa em uma vizinhança de a e $g_1(a) \neq a$.

Assim $g_1(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_{M-1}(z-a)^{M-1} + g_2(z)(z-a)^M$, onde $c_0 \neq 0$ e g_2 é holomorfa em uma vizinhança de a.

Podemos reescrever f:

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^m} + \ldots + c_{M-1} + g_2(z)$$

Portanto tem polo, pois a parte principal não é nula.

■

Observação. Podemos generalizar oque foi feito acima e permitir que $g(a) = 0$, para isso temos que escrever $g(z) = (z-a)^L\alpha(z)$, onde L é a ordem de a em g como zero e $\alpha(a) \neq 0$, $\alpha \in H(U)$, assim prosseguir como anteriormente com $\alpha(z)/h(z)$.

Observe também que se $ord_a(g) = L \geq M = ord_a(h)$ então a singularidade é removível.

Definição 33. (Meromorfa) $f : U \to \mathbb{C}$ é dita meromorfa em U (notação $f \in M(U)$) se todas sua singularidades são polos isolados.

Exercício: *Se $f, g \in H(U)$, g possui zeros isolados em U domínio (aberto e conexo), então $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ é meromorfa em U.*

De fato, vale a recíproca, no caso é simples se F é meromorfa possui uma quantidade finita de singularidades mostrar que pode ser escrita como $F = \frac{f(z)}{g(z)}$, onde $f, g \in H(U)$, f e g sem zeros em comum. Além disso, vale também que uma função meromorfa é uma razão entre duas funções holomorfas mesmo quando a quantidade de singularidades é infinita.

Fica de exercício o caso onde a quantidade de singularidades é finita.

5.2.1 Extensão ao $\hat{\mathbb{C}}$

Convenção :

Nessa seção em diante consideraremos as funções $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como definidas em domínios (U aberto e conexo).

Observe que se p é um polo de f então $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$, reciprocamente também vale: $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$ então p é uma singularidade $p \in \mathcal{S}_f$, além disso $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tem uma singularidade removível em p, podemos redefinir de forma (única) holomorfa $g(p) = 0$, e p é um zero isolado de g, podemos escrever $g(z) = (z-p)^M \cdot g_1(z)$, de forma que g_1 seja holomorfa em uma vizinhança de p, com $g_1(p) \neq 0$, ou seja, $f(z) = \frac{1/g_1(z)}{(z-p)^M}$ tem polo de ordem M em p.

Da observação acima podemos estender a função com o contra-domínio esfera de Riemann como $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa exceto em pontos isolados $p \in \mathcal{S}_f$ e contínua em todos os pontos (como vimos $p \in \mathcal{S}_f \implies f(p) = \infty$).

Definição 34. Dizemos que ∞ é uma singularidade isolada de f, se existe um $R > 0$, de forma que $f \in H(\mathbb{C} - D(0, R))$.

Notação: ∞ é um polo (sing. removível) de f se 0 se é um polo (sing. removível) de $f(1/z)$.

Exemplos:

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, onde ∞ é um polo de ordem M.

   Então, $g(z) = f(1/z) = p(1/z) + h(z)$, onde p é um polinômio de grau M e $h(z)$ é holomorfa em uma vizinhança de 0, $h(0) \neq 0$, em particular é limitada nessa vizinhança.

   Então $f(z) - p(z) = h(1/z)$ é limitada para z grande o suficiente.

   Então pelo teorema de Liouville é constante c:

   $$f(z) = p(z) + c$$

   De forma resumida, se temos uma função inteira com infinito polo, então a função é um polinômio.

2. Se ∞ é uma singularidade removível, temos que $p(z) \equiv 0$ assim $f(z)$ é uma constante.

3. Seja $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa. Como $\hat{\mathbb{C}}$ é compacto existem somente uma quantidade finita de singularidades. $\mathcal{S}_f(\mathbb{C}) = \{a_1, \ldots, a_r\}$, vamos considerar também a função:

   $$g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{r} R(z; a_i) \in H(\mathbb{C})$$

   Possui um polo ou sing. removível em ∞.

   Se ∞ é um polo: $g(z) = p(z)$ polinômio, pelo exemplo anterior.

   Logo, $f(z) = \sum_{i=1}^{r} R(z; a_i) + R(z)$, soma de polinômios aplicados em $1/(z - a_i)$ com outro polinômio ($R(z)$), isso dá uma função racional $\frac{\tilde{P}(z)}{(z-a_1)^{ord a_1} + \ldots + (z-a_r)^{ord a_r}}$.

   Então as únicas funções meromorfas na esfera de Riemann são funções racionais.

Observação. $f \in M(U) \iff$ é localmente o quociente entre duas funções holomorfas.

5.3 A Estrutura Algébrica das Funções Holomorfas

Notas por Pedro B.

Esta seção será dedicada ao estudo da $\mathbb{C}$-álgebra das funções holomorfas em um domínio U, $\mathcal{H}(U)$. Como anéis de funções geralmente são, $\mathcal{H}(U)$ é muito estranho, mas graças

a vários resultados provados até então podemos ter uma boa ideia de suas propriedades. **Ressaltamos que no que se segue U é um domínio!** Começamos com o seguinte:

Proposição 55. *$\mathcal{H}(U)$ é um domínio integral, isso é, se $f \cdot g = 0$ então ou f ou g é igual a zero.*

Demonstração. Se $f \cdot g = 0$, então a união dos conjuntos de zeros dessas funções é U, isso é: $Z_f \cup Z_g = U$ Como U é um aberto de $\mathbb{C}$ (ou $\hat{\mathbb{C}}$), U é não enumerável, e portanto ou Z_f ou Z_g deve ser não enumerável. Como qualquer conjunto não enumerável em $\mathbb{C}$ possui ponto de acumulação, pelo Teorema do Zeros ou $Z_f = U$ ou $Z_g = 0$, logo ou f ou g é igual a zero. ■

Como $\mathcal{H}(U)$ é um domínio integral, ele possui um corpo de frações (sua localização no ideal primo (0)), porém não sabemos como é esse corpo. Lembre-se que para qualquer $f, g \in \mathcal{H}(U)$, $\frac{f}{g}$ é uma função meromorfa, assim temos um bom candidato para tal corpo de frações. De fato, $\mathcal{M}(U)$ será o corpo de fracões de $\mathcal{H}(U)$, mas só veremos esse resultado mais adiante.

Lembre-se que uma valuação discreta discreta em um corpo $\mathbb{K}$ é uma função

$$\mathcal{V} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

tal que

(i) $\mathcal{V}(a \cdot b) = \mathcal{V}(a) + \mathcal{V}(b)$;

(ii) $\mathcal{V}(a + b) \geq \min\{\mathcal{V}(a) + \mathcal{V}(b)\}$;

(iii) $\mathcal{V}(a) = \infty \iff a = 0$.

Note que as condições (i) e (ii) implicam que caso $\mathcal{V}(1) = 0$, $\mathcal{V}$ é um morfismos de grupos entre o grupo de unidades do corpo para o grupo dos inteiros.

Para $p \in U$ um ponto qualquer defina a função $\mathcal{V}_p : \mathcal{M}(U)^* \to \mathbb{Z}$ por

$$\mathcal{V}_p(f) = \begin{cases} \operatorname{ord}_p f & \text{se } \ p \in Z_f \\ -\operatorname{ord}_p f & \text{se } \ p \in S_f \end{cases}$$

Onde S_f é o conjunto de singularidades, portanto polos, de f. Essa função é uma valuação discreta.

Proposição 56. *Para todo $p \in U$, a função $\mathcal{V}_p$ definida como acima é uma valuação discreta em $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Os casos são análogos. Por exemplo, se $p \in Z_f \cap Z_g$, temos que

$$f = (z - p)^{\mathcal{V}_p(f)} \cdot h_1, \quad \text{onde} \quad h_1(p) \neq 0$$

e

$$g = (z - p)^{\mathcal{V}_p(g)} \cdot h_2, \quad \text{onde} \quad h_2(p) \neq 0$$

logo, vemos que

$$f \cdot g = (z-p)^{\mathcal{V}_p(f)+\mathcal{V}_p(g)} \cdot h_1 h_2, \text{ onde } h_1 h_2(p) \neq 0$$

assim, $\operatorname{ord}_p(f \cdot g) = \mathcal{V}_p(f) + \mathcal{V}_p(g)$. ■

Observe que $\mathcal{V}_p(1) = 0$ para qualquer p, assim pela observação anterior $\mathcal{V}_p$ é um morfismo de grupos para qualquer p. Agora falemos de divisores.

Um divisor em U é uma função

$$D : U \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que o

$$\operatorname{supp} D = \{z \in U \mid D(z) \neq 0\}$$

é um conjunto discreto. Dada uma função meromorfa não zero $f \in \mathcal{M}(U)$ com zeros Z_f e polos S_f, definimos a função

$$D_f : U \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$z \mapsto \mathcal{V}_z(f).$$

Note que $\operatorname{supp} D_f = Z_f \cup S_f$, então D_f é um divisor em U. Se $f \in \mathcal{H}(U)$, $D_f \geq 0$, esse de divisor recebe o nome de divisor positivo. Abaixo mostraremos um resultado que motiva o nome de tais funções.

Em um domínio integral R, dizemos que a divide b, se existe $c \in R$ tal que $b = a \cdot c$. Existe uma relação entre divisibilidade em $\mathcal{H}(U)$ e os divisores em U!

Proposição 57. *Sejam $f, g \in \mathcal{H}(U)$, então f divide g se, e somente se, $D_f \leq D_g$.*

Demonstração. f divide g se, somente se, $g = f \cdot h$, isso por sua vez ocorre se e só se as singularidades de $g/f \in \mathcal{M}(U)$ são removíveis, por suas vez isso ocorre somente e exatamente quando

$$\mathcal{V}_z(g/f) \geq 0 \text{ para todo } z \in U.$$

Observe que pela definição de valuações discretas

$$\mathcal{V}_z(g/f) = \mathcal{V}_z(g) - \mathcal{V}_z(f).$$

Agora perceba que

$$\mathcal{V}_z(g) - \mathcal{V}_z(f) \geq 0$$

para todo z se, e só se, $D_g \geq D_f$. ■

Para um domínio integral qualquer é muito importante saber quais são seus elementos primos, e o caso de $\mathcal{H}(U)$ não é exceção. Note que se perguntar quais são os primos de $\mathcal{M}(U)$ é uma pergunta não produtiva, já que $\mathcal{M}(U)$ é um corpo, sendo assim vamos focar em $\mathcal{H}(U)$.

Em um domínio integral R qualquer um elemento $p \in R$ é dito primo se ele não é uma unidade e além disso vale o seguinte:

$$p | a \cdot b \implies p|a \text{ ou } p|b.$$

Dizemos que dois primos p_1, p_2 são associados se existe uma unidade u tal que

$$p_1 = u \cdot p_2.$$

Os primos de $\mathcal{H}(U)$ são extremamente simples, tomando a forma $(z-p)$, onde $p \in U$. Isso é o conteúdo de nosso próximo resultado.

Proposição 58. *Para todo $p \in U$ $z-p$ é um elemento primo. Além disso, se $f \in \mathcal{H}(U)$ é um primo, então f é associado a algum primo da forma $z-p$, $p \in U$.*

Demonstração. É claro que $z-p$ é um elemento primo. Suponha então que f seja primo, então existe p tal que $f(p) = 0$. Assim, sabemos que

$$f = (z-p) \cdot h$$

e portanto $z-p|f$. Se um primo divide outro eles precisam ser associados, e portanto f é associado a a $z-p$. ■

Existem funções holomorfas não constantes que se anulam em infinitos pontos, com isso temos o corolário.

Corolário 59. *$\mathcal{H}(U)$ não admite fatoração de seus elementos por primos.*

Demonstração. Vimos que os primos de $\mathcal{H}(U)$ se anulam em exatamente um ponto, logo uma função que possui infintos zeros não se decompõe como um produto de primos. ■

Agora estudaremos os ideias do anel $\mathcal{H}(U)$. Como já dito esse é um anel estranho, em particular ele não Noetheriano. Antes disso enunciemos um resultado o qual não será provado agora.

Teorema 60 (Weierstrass)**.** *Seja D um divisor em U, então existe $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que*

$$D = D_f.$$

Lembre-se que um anel comutativo R é dito Noetheriano se qualquer cadeia ascendente de ideais de R

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$$

estabiliza, isso é, existe n tal que $I_n = I_k$ para todo $k \geq n$. Equivalentemente, R é Noetheriano se todo ideal é finitamente gerado.

Proposição 61. *$\mathcal{H}(U)$ não é Noetheriano.*

Demonstração. Seja Z o conjunto de zeros de uma função que que se anula em infinito pontos, então

$$I_Z = \{f \in \mathcal{H}(U) \mid f|_{Z-F} = 0 \text{ onde } F \text{ é finito}\}$$

Note que I_Z é não vazio já que Z é um conjunto de zeros. I_Z é claramente um ideal. Vamos mostrar que I_Z não é finitamente gerado. Seja $f_1, \dots, f_n \in I_Z$ e seja

$$J = \sum \mathcal{H}(U) \cdot f_i$$

o ideal gerado por eles. É claro que para $g \in J$,

$$\bigcap_i Z_{f_i} \subset Z_g \tag{5.2}$$

Por definição de I_Z, existe $p \in U$ tal que $f_i(p) \neq 0$ para todo i, então seja $Z - \{p\} = Z'$ e defina

$$D(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z' \\ 0, & z \notin Z' \end{cases}$$

Dessa forma, D é um divisor positivo em U, e pelo teorema anterior existe $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que $D_f = D$. Por definição de D_f, sabemos que $f \in I_Z$, porém $D_f(p) \neq 0$, então $f(p) \neq 0$, logo $f \notin U$ pela observação 5.2 acima, portanto I_Z não pode ser finitamente gerado. ■

Em um domínio integral qualquer, o máximo divisor comum (mdc) de um conjunto não vazio $I \subset R$ é um elemento $f \in R$ que satisfaz as seguintes condições

(i) $f|g$ para todo $g \in I$;

(ii) $se f'|g$ para todo $g \in I$ então $f'|f$.

Proposição 62. *Se $I \subset \mathcal{H}(U)$ é não vazio, então I possui um* mdc.

Demonstração. Defina a função

$$D : U \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$p \mapsto \min\{D_g(p) \mid g \in I\}.$$

Se $p \in \operatorname{supp} D$, então $p \in \operatorname{spp} D_g$, já que $D(p) \leq D_g(p)$, logo D é um divisor em U. Pelo Teorema 60, existe f tal que $D = D_f$. Assim, pela Proposição 57, f divide todos os elementos de I. Além disso, por definição f é maximal detre as funções com essa propriedade. ■

Continuando com a ideia de máximos divisores comuns, enunciamos mais um teorema que não provaremos por enquanto. Em um anel onde mdc's existem, dizemos que dois elementos são primos relaticvos se o mdc entre eles é 1.

Teorema 63 (Wedderburn)**.** *Se $f, g \in \mathcal{H}(U)$ são primos relativos, existem funções $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(U)$ tal que*

$$h_1 f + h_2 g = 1$$

Com esse teorema em mãos conseguimos provar a

Proposição 64. *Para $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(U)$ e f o* mdc *dessas funções, existem $g_1, \ldots, g_n$ tal que*

$$f = \sum g_i f_i$$

Demonstração. Seguimos por indução. Para $n = 1, 0$ não há o que provar. Suponha o resultado válido para $n - 1$ funções. Seja

$$h = \operatorname{mdc}\{f_2, \ldots, f_n\}$$

por hipótese existem $g_2, \ldots, g_n$ tal que

$$h = \sum g_i f_i, \quad i \geq 2.$$

Considere $s = f/f_1$ e $t = h/f$, então s e t são primos relativos e pelo teorema anterior existe a, b tal que

$$as + bt = 1$$

portanto, conseguimos escrever

$$f = af_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n.$$

■

Finalmente, mostraremos que todo ideal finitamente gerado de $\mathcal{H}(U)$ é um ideal principal.

Teorema 65. *Se $I \subset \mathcal{H}(U)$ é um ideal finitamente gerado ele é principal.*

Demonstração. Sejam $f_1, \ldots, f_n$ os geradores de I e seja f o mdc entre eles. Pelo teorema acima,

$$\mathcal{H}(U) \cdot f \subset I.$$

Que $\mathcal{H}(U) \cdot f_i \subset \mathcal{H}(U) \cdot f$ é óbvio, já que f divide cada um deles. ■

5.4 Singularidades Essenciais

Definição 35. Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função. $p \in U$ é dito uma singularidade essencial se ela não é nem uma uma singularidade removível nem um polo.

Proposição 66. *p é uma singularidade essencial de f se, e somente se, para todo disco $D^*(p, r)$ em torno de p não contendo p, $f(D^*(p, r))$ é denso $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Caso p não seja essencial, temos que

$$\lim_{z \to p} f(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{z \to p} f(z) = \infty$$

e em nenhum desses casos a imagem é densa.

Suponha agora que p seja essencial e que $f(D^*(p, r))$ não seja densa, então existe um disco $D(q, \epsilon)$ tal que

$$d(f(z), q) > \epsilon$$

para todo z no disco. Assim tomando

$$g = \frac{1}{f - q}$$

vemos que g tem uma singularidade em p e que $|g(z)| < 1/\epsilon$ Se $g(p) = 0$, então a singularidade de f é removível, se é diferente então ela é um polo. ■

Um resultado muito mais forte, o qual não provaremos, é o seguinte:

Teorema 67 (Picard)**.** *Se p é uma singularidade essencial de f, então para todo $r > 0$, temos que $f(D^*(p, r))$ é o plano inteiro ou o plano menos um ponto.*

Notas por Bruno O.

5.5 O Teorema de Cauchy

Nesta seção estudaremos o Teorema de Cauchy como enunciado por E. Artin. Esta versão do Teorema se mostrará particularmente útil em nossos tópicos posteriores. De forma usual, seja U um domínio (aberto e conexo) em $\mathbb{C}$. Definimos $X_U = PC^1/\text{reparametrizações}$. Isto é, o conjunto das classes de equivalência de caminhos PC^1, fechados e que se equivalem caso haja uma reparametrização que os relacionem. Em seguida, definimos

$$\mathcal{Z}_U = \{\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \gamma_j \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ n_j \in \mathbb{Z},\ \gamma_j \in X_U\},$$

o $\mathbb{Z}$-módulo gerado por X_U. Por fim,

$$H_U^1 := Z_U/\sim$$

em que $\gamma \sim \gamma' \iff \eta_\gamma(a) = \eta_{\gamma'}(a)$ para todo $a \in U$.

Teorema 68 (Teorema de Cauchy (E. Artin))**.** *Sejam $\gamma \in Z_U$ tal que $\gamma \sim 0$ e $f \in \mathcal{H}(U)$. Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Para a demonstração, seguiremos os passos de *Dixon*[1], discutindo previamente dois lemas.

Lema 69. *Sejam $f \in \mathcal{H}(U)$ e $g : U \times U \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(w,z) := \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{(w-z)}, & se\ w \neq z \\ f'(z), & se\ w = z. \end{cases}$$

Então g é contínua e, para todo $w \in U$, a aplicação $z \to g(w,z)$ é analítica.

Demonstração. Como f é contínua, g é contínua em todo ponto (w,z) tal que $w \neq z$. Em $w = z$, escolha uma sequência (w_n, z_n) que converge a (w,z) conforme $n \to \infty$. Note que podemos escrever

$$g(w_n,z_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{w_n - z_n}\int_{[w_n,z_n]} f'(\mu)d\mu, & w_n \neq z_n \\ f'(z_n), & w_n = z_n. \end{cases}$$

Lembrando que $f \in \mathcal{H}(U) \implies f \in C^\infty(U)$, temos que f' é contínua e, consequentemente, $\lim_{n\to\infty} g(w_n,z_n) = g(w,z)$. Logo, g é contínua. Segue por observação que a aplicação $\phi_w(z) := g(w,z)$ é contínua para w fixo. Também, é claro que é holomorfa exceto em $z = w$. Isto é,

$$\phi_w(z) \in C(U) \cap \mathcal{H}(U - \{w\}).$$

Além disso, $\lim_{z\to w} \phi_w(z)(z-w) = 0$. Mas já vimos que tais são condições suficientes para afirmarmos que $z \to g(w,z) \in \mathcal{H}(U)$ logo é analítica em U. ■

[1] *John D. Dixon*, A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem. Proceedings of The American Mathematical Society. Volume 29, Number 3, August 1971.

Lema 70. *Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua tal que, para todo $t \in [a,b]$, a aplicação $z \to \phi(t,z)$ é holomorfa. Defina $F : U \to \mathbb{C}$ por $F(z) := \int_a^b \phi(t,z)dt$. Então F é holomorfa e $F'(z) = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial z}(t,z)dt$.*

Demonstração. Escolha $r > 0$ tal que $\bar{D}(p,r) \subset U$. Seja $z \in D(p,r)$. Podemos nos guiar pela fórmula de Cauchy para escrevermos

$$F(z) = \int_a^b \frac{1}{2\pi i} \int_{C(p,r)} \frac{\phi(t,w)}{w-z} dw \cdot dt.$$

Como $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ é contínua, a aplicação $(t,w) \to \dfrac{\phi(t,w)}{w-z}$ é contínua para todo $t \in [a,b]$ e $w \in C(p,r)$. Logo, podemos utilizar o Teorema de Fubini para concluirmos que:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(p,r)} \left[\int_a^b \phi(t,w)dt \right] \frac{1}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(p,r)} \frac{\psi(w)}{w-z} dw, \end{aligned}$$

onde $\psi(w) = \int_a^b \phi(t,w)dt$ é contínua para todo $w \in D(p,r)$. Mas já vimos, na demonstração do Teorema (41), que funções dessa forma são analíticas e, portanto, holomorfas. Por outro lado, a equação [derivadas funções analiticas] nos diz que:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (p,r) \frac{\psi(w)}{(w-z)^2} dw \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C(p,r)} \frac{\phi(w,t)}{(w-z)^2} dw \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial z}(t,z)dt. \end{aligned}$$

■

Agora estamos prontos para o estudo da demonstração do Teorema de Cauchy (68).

Demonstração. Seja $U' = \{p \in \mathbb{C} \setminus Im(\gamma) \mid \eta_\gamma(p) = 0\}$. Por hipótese, $U^C \subset U'$. Dado $p \in U'$, podemos encontrar vizinhança V de p no aberto $\mathbb{C} \setminus Im(\gamma)$ tal que $V \subset U'$, pois $\eta_\gamma(p)$ é localmente constante pelo corolário (31). Logo U' é aberto. Segue que podemos escrever $\mathbb{C} = U' \cup U$. Considere $z \in U' \cap U$ e g como no lema (69). Então para todo $w \in Im(\gamma)$, $g(w,z) = \dfrac{f(w) - f(z)}{w-z}$. Segue que:

$$\begin{aligned} \int_\gamma g(w,z)dw &= \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i \eta_\gamma(z) f(z) \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \end{aligned}$$

visto que $z \in U' \implies \eta_\gamma(z) = 0$. Então é bem definida a função $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$h(z) = \begin{cases} \int_\gamma g(w,z)dw, & z \in U \\ \int_\gamma \dfrac{f(w)}{w-z}dw, & z \in U'. \end{cases}$$

Pelo Lema (70), $h(z) \in \mathcal{H}(U)$. Além disso, é claramente holomorfa em U', uma vez que f é holomorfa em $Im(\gamma) \subset U$. Logo, f é holomorfa em todo o plano complexo.

Notamos que, para z com módulo suficientemente grande, $\eta_\gamma(z) = 0$. Ou seja, $z \in U'$. Esta observação nos permite concluir que

$$h(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \to 0$$

à medida que $|z| \to \infty$. Em particular, h é limitada e, pelo Teorema de Liouville, h é constante. Concluímos que $h \equiv 0$. Então, para $z \in U \setminus Im(\gamma)$:

$$\begin{aligned} 0 = h(z) &= \int_\gamma g(w,z)dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i \eta_\gamma(z) f(z), \end{aligned}$$

provando a fórmula de Cauchy. Num caso particular, se escolhermos $g(z) = (z-p)f(z)$ para $p \in U \setminus Im(\gamma)$ e aplicarmos a fórmula acima, temos:

$$(z-p)f(z)\eta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(w-p)f(w)}{w-z}dw.$$

Para $z = p$, temos o resultado desejado:

$$0 = \int_\gamma f(w)dw.$$

■

5.6 Séries de Laurent

Como uma primeira aplicação do Teorema de Cauchy como visto na seção anterior, estudaremos séries de Laurent de funções holomorfas definidas em aneis. Sejam

$$A = A(p, R_1, R_2) = \{z \mid R_1 < |z-p| < R_2\}$$

e $f \in \mathcal{H}(A)$. Escolhemos r_1 e r_2 tais que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ e definimos o ciclo $\Gamma = \{\gamma_{r_2}, -\gamma_{r_1}\}$. Se $z \in A(p, r_1, r_2)$, a fórmula de Cauchy nos permite escrever:

$$f(z) = f(z)\eta_\Gamma(z) = I - J,$$

onde, pelo desenvolvimento da prova do Teorema (41):

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw \cdot (z-p)^n$$

e

$$J = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(w)(w-p)^{n-1}dw \cdot \frac{1}{(z-p)^n},$$

visto que, se $w \in \gamma_{r_1}$:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-p-(w-p)} = -\frac{1}{z-p(1-\frac{w-p}{z-p})} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-p)^n}{(z-p)^{n+1}}.$$

Então,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw \cdot (z-p)^n, \tag{5.3}$$

a chamada série de Laurent de f, em que $r_1 < r < r_2 \sim R_1 < r < R_2$. Vale notar que a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de A. Sob essa hipótese, suponha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n.$$

Então, para $R_1 < r < R_2$, podemos escrever:

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\gamma_r}\frac{a_n}{(w-p)^{n-k+1}}dw = 2\pi i a_n,$$

já que os termos $\dfrac{1}{(w-p)^{n-k+1}}$, $k \neq n$ possuem potêncial holomorfo e, portanto, suas integrais no caminho fechado γ se anulam. Concluímos que decomposição (5.3) é única.

5.7 Teoria dos Resíduos

Notas por Victor J.

Seja $f : U \to \mathbb{C}$, $a \in U$ uma singularidade isolada, temos pelas partes anteriores:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n,$$

Definição 36. O resíduo de f em a é o termo a_{-1} de sua série e notamos $a_{-1} = Res_a(f)$.

Pela fórmula para os coeficientes da Série de Laurentz 5.3 temos que para r suficientemente pequeno, $\gamma_r \in PC^1$ o círculo de centro a e raio r orientado positivamente, temos:

$$Res_a(f) = \int_{\gamma_r} f(z)dz. \tag{5.4}$$

Da mesma forma, se Γ é um ciclo em $U - \{a\}$ tal que $\Gamma \sim 0$ em U e dê uma volta ao redor de a ($\eta_\Gamma(a) = 1$), então:

$$Res_a(f) = \int_{\Gamma} f(z)dz$$

Proposição 71. *Dado $R > 0$ tal que a seja a única singularidade de f em $\bar{D}(a, R) \subset U$, então $Res_a(f)$ é o único valor α tal que a função $z \mapsto f(z) - \dfrac{\alpha}{z-a}$ possui potencial holomorfo em $D(a, R) - \{a\}$.*

Demonstração. Utilizando a série de Laurentz e a definição anterior, temos:

$$f(z) - \frac{Res_a(f)}{z-a} = \sum_{n \neq 1} a_n (z-a)^n$$

De forma que fica claro que tal função possui uma primitiva holomorfa $g(z) = \sum_{n \neq 1} \dfrac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ definina em $D(a, R) - \{a\}$.

Reciprocamente, se $f(z) - \dfrac{\alpha}{z-a} = g'(z)$ em $D(a, R) - \{a\}$, tomamos $0 < r < R$ e γ_r o círculo de raio r ao redor de a, temos:

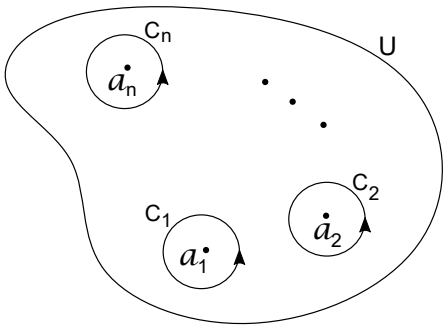
$$Res_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} g'(z) + \frac{\alpha}{z-a} dz = \alpha.$$

■

Teorema 72. *(Teorema dos Resíduos de Cauchy) Seja $f : U \to \mathbb{C}$ e $S(f) = \{a_1, \cdots, a_n\}$ as singularidades de f em U. Dado um ciclo $\Gamma \subset U$ com $\Gamma \sim 0$ e $\Gamma \cap S(f) = \emptyset$, então:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{a_i}(f)\ \eta_{\Gamma}(a_i).$$

Demonstração. Ao redor de cada singularidade a_i, tomamos um circulo $C_i \subset U$ orientado positivamente de forma que a_i seja a única singularidade de f no interior de C_i.



Temos então:

$$\eta_{C_i}(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Tomamos o cliclo $\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \eta_{\Gamma}(a_i) \cdot C_i$, afirmamos que $\tilde{\Gamma} \sim \Gamma$ em $U - S(f)$, de fato:

Se $z \notin U$ é claro que $\eta_{\tilde{\Gamma}}(z) = \eta_{\Gamma}(z) = 0$. Já para $a_i \in S(f)$

$$\eta_{\tilde{\Gamma}}(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \eta_{\Gamma}(a_i)\delta_{ij} = \eta_{\Gamma}(a_i).$$

Assim, como o número de voltas coincide para todo ponto fora de $U - S(f)$, temos $\tilde{\Gamma} \sim \Gamma$ em $U - S(f)$. Portanto, pelo Teorema de Cauchy 68 aplicado ao ciclo $\Gamma - \tilde{\Gamma}$ em $U - S(f)$, temos:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \eta_{\Gamma}(a_i) \int_{C_i} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \eta_{\Gamma}(a_i) Res_{a_i}(f)$$

■

Observação. É imediato das definições que se $a \in U$ é uma singularidade removível de f, então $Res_a(f) = 0$; Se $a \in S(f)$ é um polo de ordem m, temos em uma vizinhança de a:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + g(z),$$

com g holomorfa nesta vizinhança, logo:

$$(z-a)^m f(z) = a_{-1}(z-a)^m + \cdots + a_{-m} + g(z)(z-a)^m,$$

Fazendo a expansão de g em série de potências ao redor de a fica claro que:

$$a_{-1} = Res_a(f) = \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\frac{(z-a)^m f(z)}{(m-1)!} \right). \tag{5.5}$$

Exemplo 11. Seja $f \in \mathcal{H}(U)$ não identicamente nula e um zero $a \in Z(f)$ de ordem m, então pela Forma Local de funções Holomorfas temos que em uma vizinhança de a, $f(z) = (z-a)^m g(z)$, com g holomorfa e sem zeros nesta vizinhança, temos:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

A função f'/f possui um polo em a de ordem m e a função g'/g é holomorfa nesta vizinhança pois g não possui zeros. Assim:

$$Res_a(f'/f) = m = ord_a(f),$$

isto é, se $f \in \mathcal{H}(U)$ o resíduo da função f'/f em um zero de f é a ordem deste zero.

5.7.1 Princípio do Argumento

Seja $f \in \mathcal{M}(U)$ uma função meromorfa, notaremos o conjunto de suas singularidades como $P(f)$, pois são, por definição, todos polos. Dado um ciclo $\Gamma \subset U$ tal que $\Gamma \sim 0$ em U e $\Gamma \cap P(f) = \emptyset$, podemos calcular o número de voltas do ciclo $f \circ \Gamma$ ao redor de 0 pelo Teorema de Mudança de Variáveis:

$$\eta_{f\circ\Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\Gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Então, pelo Teorema dos Resíduos de Cauchy 72:

$$\eta_{f\circ\Gamma}(0) = \sum_{a\in Z(f)\cup P(f)} Res_a(f'/f)\cdot\eta_\Gamma(a).$$

De fato, como visto no Exemplo 11 se $a \in Z(f)$, então $Res_a(f'/f) = ord_a(f)$ é sua ordem como zero de f. Já para $a \in P(f)$, podemos fazer o mesmo raciocínio do Exemplo 11, mas utilizando a ideia para polos. Seja $a \in P(f)$ um polo de ordem m, em uma vizinhança de a, temos:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

para uma função g holomorfa e que não se anula nesta vizinhança. Então, para γ_r circulo de raio r ao redor de a contido nesta vizinhança:

$$\begin{aligned} Res_a(f'/f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\left(\frac{g'(z)}{g(z)} - m\right)dz \\ &= -m = -ord_a(f). \end{aligned}$$

Com esta caracterização juntamente com o Exemplo 11, concluímos que para $f \in \mathcal{M}(U)$ não identicamente nula, temos que se $a \in Z(f)\cup P(f)$, então

$$Res_a(f'/f) = \mathcal{V}_a(f),$$

onde $\mathcal{V}_a(f)$ é a valuação discreta discutida na Prop. 56. Com isto, podemos concluir:

Teorema 73. *(Princípio do Argumento) Dada $f \in \mathcal{M}(U)$ e um ciclo $\Gamma \subset U$ tal que $\Gamma \sim 0$ em U e $\Gamma \cap P(f) = \emptyset$, então:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z(f)} ord_a(f)\eta_\Gamma(a) \; - \sum_{a\in P(f)} ord_a(f)\eta_\Gamma(a).$$

Temos como colorário um teorema muito utilizado:

Corolário 74. *(Teorema de Rouché) Seja $U \subset \mathbb{C}$ domínio, $\gamma \subset U$ um caminho fechado tal que $\gamma \sim 0$ em U, e $f, g \in \mathcal{H}(U)$ tais que $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \gamma$. Então:*

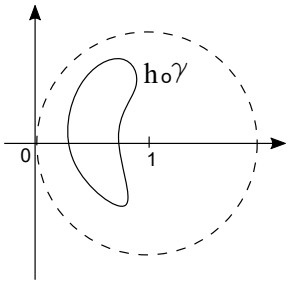
$$\sum_{a\in Z(f)} \eta_\gamma(a) ord_a(f) = \sum_{a\in Z(g)} \eta_\gamma(a) ord_a(g),$$

isto é, as função possuem a mesma quantidade de zeros, contando multiplicidade, no interior de γ.

Demonstração. Pela desigualdade da hipótese, temos em particular que f não possui zeros em γ, dividindo a inequanção por $|f(z)|$, temos:

$$\left|1 - \frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \quad \text{, para todo } z \in \gamma.$$

De fato, a função $h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ é meromorfa em U e pela inequação acima, a imagem $h\circ\gamma$ está contida no disco $D(1,1)$.



Logo, com uma mudança de variáveis, temos:

$$0 = \eta_{h\circ\gamma}(0) = \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$

Podemos então aplicar o Princípio do Argumento na função h e pela relação dos zeros e polos da h com os zeros das funções f e g e suas respectivas ordens teremos o resultado. ■

Este teorema pode ser prático para encontrar a quantidade de zeros no interior de um conjunto para certas funções, vejamos no exemplo:

Exemplo 12. Sejam $g(z) = z^5 - 3z^2 + 1$, $f(z) = -3z^3$, claramente f possui 0 como uma raiz de multiplicidade 3. Se tomarmos C_1 o círculo de centro 0 e raio 1, temos:

$$|f(z) - g(z)| \leq 2 < 3 = |f(z)|, \text{ para todo } z \in C_1.$$

Logo, pelo Teorema de Rouché, g também possui 3 zeros no interior de C_1 (contando multiplicidade). Esta ferramenta pode ser útil, pois apesar de sabermos que g possui 5 zeros contando multiplicidade, não é trivial determinar onde estão estes zeros.

Temos também como Corolário do Teorema de Rouché:

Teorema 75. *(Teorema Fundamental da Álgebra) Seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio de grau n, então P possui n raízes complexas (contando multiplicidade).*

Demonstração. Seja $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, tomemos um real $R > 0$, tal que para $|z| > R$, o termo dominante de P seja muito maior que todos os outros, isto é, tal que $|a_n z|^n > |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0|$. Isto é sempre possível devido à velocidade de crescimento de $|z|^n$, então:

$$|P(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|, \text{ para todo } z \in C_R,$$

onde C_R é o disco de centro 0 e raio R. Assim pelo Teo. de Rouché, $P(z)$ possui n zeros (contando multiplicidade) no interior de C_R. Como podemos fazer o mesmo para todo $r > R$, concluímos que P possui n zeros (contando multiplicidade) em $\mathbb{C}$. ■

5.8 Calculo de integrais reais

Uma aplicação popular do teorema dos resíduos (em cursos de matématica, pelo menos) é para calcular integrais reais definidos. Nesta parte veremos alguns exemplos; começaremos com uns lemas úteis.

Denotamos

$$\mathrm{Sect}(\theta_1, \theta_2) := \{z = e^{i\theta} : r > 0, \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}$$
$$\mathrm{Sect}(\theta_1, \theta_2; r_0) := \{z = e^{i\theta} : r > r_0, \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

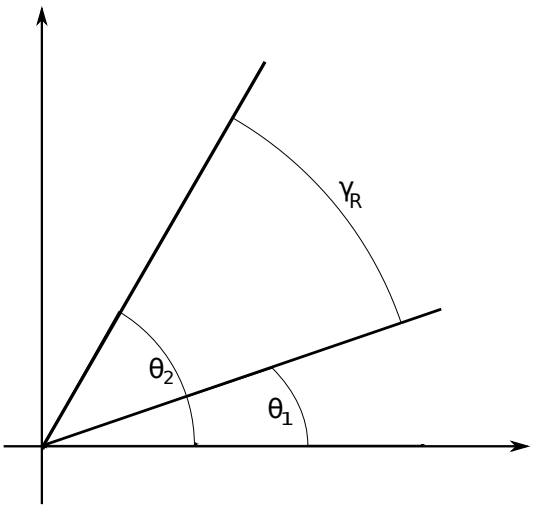
Lema 76 (Lemma I)**.** *Seja f continua em* $\mathrm{Sect}(\theta_1, \theta_2)$ *(ou integrable), e com*

$$z \cdot f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0.$$

Então

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

onde $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in (\theta_1, \theta_2)$.



Demonstração. Temos

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_R} |f(z)|d|z| \leq 2\pi R\|f\|_{0,\gamma_R} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0.$$

■

Lema 77 (Lemma II)**.** *Seja f continua em* $\mathrm{Sect}(\theta_1, \theta_2) \cap \mathbb{D}(0, r_0)$*, e com*

$$z \cdot f(z) \xrightarrow[z\to 0]{} L.$$

Então

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)L$$

onde $\gamma_r(t) = re^{it}, t \in (\theta_1, \theta_2)$.

Demonstração. Calculamos

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma_r} \left(\frac{zf(z) - L}{z} + \frac{L}{z}\right) dz = \int_{\gamma_r} \frac{zf(z) - L}{z} dz + i(\theta_2 - \theta_1)L.$$

A função $g(z) = zf(z) - L$ converge a 0 quando $z \mapsto 0$, e

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z} dz \right| \leq \|g\|_{0,\gamma_r} 2\pi \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

■

Lema 78 (Lema de Jordan)**.** *Consideramos* $U = \{z : \Im z > 0\} \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$, *e* $f \in \mathcal{H}(U)$. *Suponhamos que* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. *Então, para todo* $\lambda > 0$ *vale*

$$\int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

onde $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in (0, \pi)$.

Nota. Observe que a função $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda y}$ converge rápidamente para zero quando $z \mapsto \infty$.

Demonstração. Calculamos

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz \right| \leq \|f\|_{0,\gamma_R} \int_{\gamma_R} e^{-\lambda y} d|z| = \|f\|_{0,\gamma_R} \int_0^\pi e^{-\lambda R \sin\theta} d\theta.$$

Por outro lado,

$$\int_0^\pi e^{-\lambda R \sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin\theta} d\theta := 2I$$

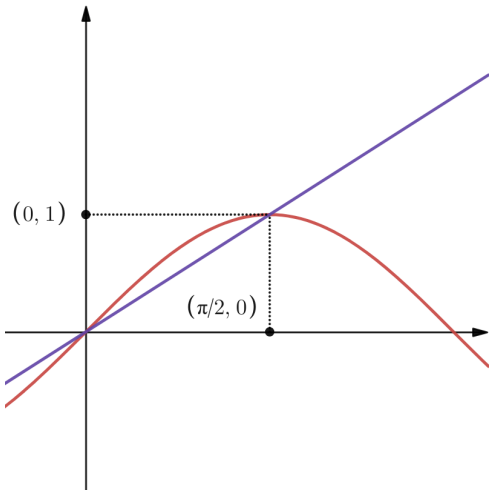


Figura 5.1: Em $[0, \pi/2]$ temos $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$.

Assim,

$$2I \leq 2 \int_0^\pi e^{-\lambda R \frac{2}{\pi}\theta} d\theta = \frac{2\pi}{2R\lambda}(1 - e^{-R\lambda}) \leq \frac{\pi}{R\lambda}$$

e por tanto

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z) dz \right| \leq \|f\|_{0,\gamma_R} \frac{\pi}{R\lambda} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

■

A continuação veremos exemplos de como calcular integrais definidas.

5.8.1 Integral de funções periódicas sobre seu período.

Consideremos $a > |b|$: queremos calcular

$$I = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{a + b\cos\theta} d\theta.$$

Denotamos por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ a parametrização direta do círculo unidade: podemos escrever

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ dz &= ie^{i\theta} = iz \\ \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

e por tanto

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2}{bz^2 + 2az + b} dz.$$

Se $g(z) = \frac{1}{bz^2+2az+b}$ temos pelo teorema dos resíduos,

$$I = 2\sum_{a\in\mathbb{D}} Res_a(g).$$

Claramente g tem dois polos de ordem 1 (as raízes do denominador), que por cálculo direto obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{b}(\sqrt{a^2 - b^2} - a) \\ \beta &= \frac{1}{b}(-\sqrt{a^2 - b^2} - a) \end{aligned}$$

Destes, somente α está dentro de $\mathbb{D}$, e

$$Res_\alpha g = \lim_{z\to\alpha}(z - \alpha)g(z) = \frac{1}{b(\alpha - \beta)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Concluímos que

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Caso particular $a = 1$ Temos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + b\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

Como $|b| < 1$ os utilizar o teorema do binomio para expandir

$$(1 - b^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} b^{2n}(-1)^n$$

com

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\cdot(2n)!.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+b\cos\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} b^n(-1)^n\cos^n\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot b^{2n}.$$

A fórmula anterior é válida uniformemente para $|b|<1$: deduzimos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

5.8.2 Valor principal de integrais

Queremos calcular integrais reais impróprias. Lembremos os seguintes conceitos de análise.

Seja $f:\mathbb{R}\to\Re$ uma função medível. Dezimos que

1. f tem integral absolutamente convergente se

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty.$$

   Neste caso, com um pequeno abuso da lenguagem, escrevemos $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2. f tem integral condicionalmente convergente se $f\notin\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e

$$\exists\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)dt\in\mathbb{R}\quad\text{ou }\exists\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(t)dt\in\mathbb{R}.$$

3. Se existe $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(t)dt\in\mathbb{R}$, chamamos este nro. o valor principal da integral, e escrevemos

$$vp\int_{-oo}^{\infty}f(t)dt = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(t)dt.$$

Exercício: Mostrar que se $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então

$$vp\int_{-oo}^{\infty}f(t)dt = \int_{-oo}^{\infty}f(t)dt.$$

5.8.3 Integrais de funções racionais

Vejamos dois exemplos. Para começar, queremos calcular

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad a > 0$$

Podemos utilizar uma primitiva para o cálculo, mas vamos a utilizar o método dos resíduos neste caso simples, para nos familiarizar mais com esta ferramenta.

Para $R > 0$ seja $\Gamma_R = \gamma_R * t_R$ onde $t_r : [-R, R] \to \mathbb{C}, t_R(t) = t$.

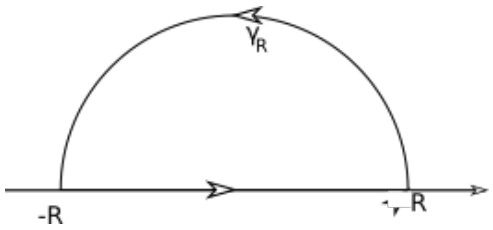


Figura 5.2: A curva Γ_R.

Como $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, temos

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{t_R} f(z)dz \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$$

e pelo Lema I,

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz.$$

Por outro lado, pelo teorema dos resíduos

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i Res_{ia} f$$

sendo $z = ia$ a única singularidade de f dentro da curva Γ_R. Claramente ia é um polo de orde, 1, e por tanto

$$2\pi i Res_{ia} f = 2\pi i \lim_{z\to ia} (z - ia) f(z) = 2\pi i \lim_{z\to ia} \frac{1}{z + ia} = \frac{\pi}{a}.$$

Concluímos que $I = \frac{\pi}{a}$.

Nosso segundo exemplo nesta parte é calcular

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Procedindo de forma análoga, temos

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \lim_{R\to\infty} \sum_{a \text{ dentro de} \Gamma_R} Res_a f \quad f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

A função f tem 4 polos simples $a_j = \exp\left((2j+1)\frac{i\pi}{4}\right), j = 0,1,2,3$; podemos calcular, utilizando L'Hopital

$$Res_{a_j} f = \lim_{z\to a_j} \frac{z-a_j}{z^4+1} = \lim_{z\to a_j} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4\exp\left((2j+1)\frac{3i\pi}{4}\right)},$$

e em particular não dependem de R. No final, temos

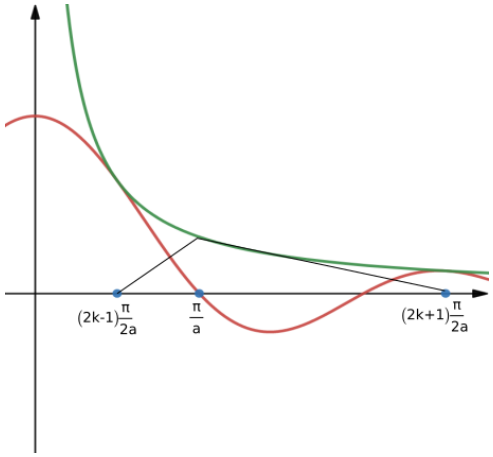
$$J = 2\pi i \left(Res_{a_0} f + Res_{a_1} f\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{e^{i3\pi/4}} + \frac{1}{e^{i\pi/4}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

5.8.4 Integrais com singularidades

Queremos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx \quad a > 0.$$

Observemos primeiro que a função $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ não está em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (ver figura).



Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin(ax)|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{\pi(2k+1)} = \infty.$$

Por outro lado, utilizando um argumento semelhante e o Teorema de Leibnitz para series alternadas vemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$ é finito, e por tanto a integral é condicionalmente convergente. Vamos então a calcular

$$I = vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx.$$

Seja $g(z) = e^{iaz}\frac{1}{z}$: esta é uma função meromorfa, com um polo simples em $z = 0$ de resíduo 1. Consideramos a curva $\Gamma_{R,r}$ como na figura abaixo.

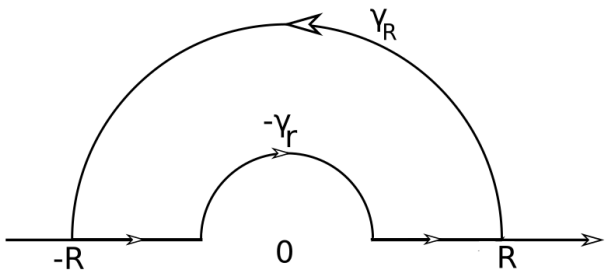


Figura 5.3: Semi-circulos evitando uma singularidade.

Temos

$$I = \int_{\Gamma_{R,r}} g(z)dz = 0$$
$$\int_{-R}^{-r} g(x)dx + \int_{r}^{R} g(x)dx + \int_{\gamma_R} g(z)dz - \int_{\gamma_r} g(z)dz;$$

pelo Lema de Jordan

$$0 = \int_{-\infty}^{-r} g(x)dx + \int_{r}^{\infty} g(x)dx - \int_{\gamma_r} g(z)dz$$

e pelo Lema II

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx - \pi i.$$

Deduzimos,

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi$$

(e também que $vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x} dx = 0$, o qual é claro pela simetría da função cos.)

Observação. Se denotamos para $a \geq 0$ $I_a = vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$, temos

$$\lim_{a \to 0} I_a = \pi \neq 0 = I_0.$$

Não é possível em geral intecambiar limite com integral para funções com integral condicionalmente convergente.

5.8.5 Outras integrais

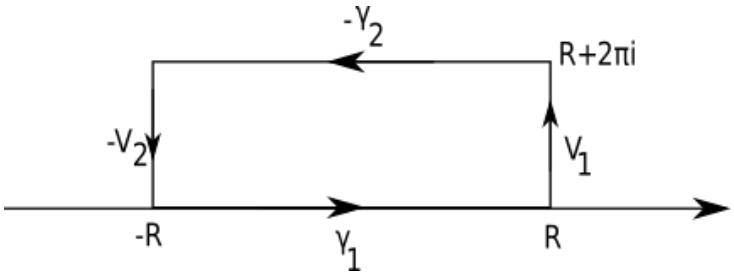
Para $0 < a < 1$ queremos calcular

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Temos que I é absolutamente convergente. Seja $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$: f é meromorfa em $\mathbb{C}$ com polos simples em $z = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$. Notemos também que

$$f(z + 2\pi i) = e^{2\pi i a} f(z).$$

Consideramos o caminho fechado $\Gamma_R = \gamma_1 - \gamma_2 + V_1 - V_2$.



É fácil de ver que $\lim_{R\to\infty} \int_{V_i} f(z)dz = 0$, e

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = e^{2\pi i a} \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Como a única singularidade dentro de Γ_R é $z = \pi i$, temos

$$2\pi i Res_{i\pi} f = lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = (1 - e^{2\pi i a})I$$

Para finalizar, calculamos

$$Res_{i\pi} f = \lim_{z\to\pi i} (z - i\pi)\frac{e^{az}}{e^z + 1} = \lim_{z\to\pi i} \frac{-e^{ia\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ia\pi}.$$

Deduzimos

$$I = \frac{2\pi i e^{i\pi a}}{e^{2\pi i a} - 1} = \pi \frac{2i}{e^{\pi i a} - e^{\pi i a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

5.8.6 Integrais de raízes e logaritmos: pontos de ramificação.

Consideramos aqui outro tipo de integrais, que involvem a função logaritmo.

1) Queremos calcular

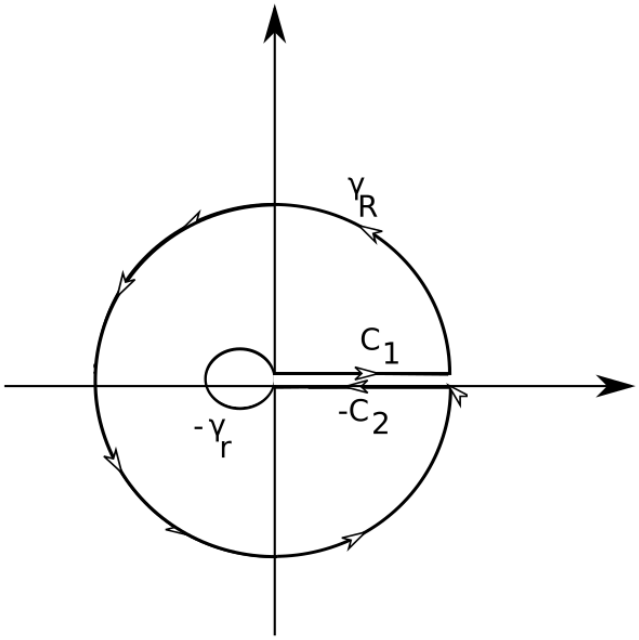
$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1 + x^2} dx.$$

Notamos que esta é uma integral absolutamente convergente. Para utilizar o método dos resíduos o natural é considerar a função $f(z) = \frac{z^{1/3}}{1+z^2}$, porém esta função como sabemos não é bem definida em todo o plano e precisamos especificar um ramo analítico. Equivalentemente, devemos especificar um ramo de $\log z$.

Escolhemos $U = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ($\theta \in (0, 2\pi)$) e consideramos $f : U \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{1 + z^2} \quad \Rightarrow f \in \mathcal{H}(U).$$

Definimos $\Gamma_{R,r} = \gamma_R - \gamma_r + C_1 - C_2$;



Como

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$
$$\lim_{z\to 0} zf(z) = 0 \Rightarrow \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$$

Por outro lado, em C_2 temos que $z^{1/3} = e^{2\pi i/3}|z|^{1/3}$, e por tanto

$$\int_{C_2} f(z)dz = e^{2\pi i/3} \int_{C_1} f(z)dz$$

Concluímos que

$$(1 - e^{2\pi i/3}) \int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i(Res_i + Res(-i)f) \Rightarrow (1 - e^{2\pi i/3})I = 2\pi i(Res_i + Res(-i)f).$$

Assim,

$$Res_i f = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^{1/3}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{i\pi/6}}{2i} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2} = -1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Res_{-i} f = -\frac{e^{i\pi/2}}{2i} = -\frac{1}{2}$$

e por tanto

$$2\pi i(Res_i + Res(-i)f) = -\pi i e^{i\pi/3}$$
$$\Rightarrow I = \frac{\pi i e^{i\pi/3}}{e^{2\pi i/3} - 1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2) Queremos calcular

$$J = \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad a > 0.$$

Claramente a integral é absolutamente convergente. Consideramos o ramo do logaritmo obtido tirando parte negativa do eixo y, isto é, $\log z$ com $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ e definimos

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Esta escolha do ramo é feita pois neste caso f tem apenas um polo simples $z = ia$ no semi-plano $\Im z > 0$ ($Res_a f = \frac{\log ia}{2ia} = \frac{log a + i\pi/2)}{2ia}$), por tanto podemos utilizar um par de semi-circulos conetados como na figura 5.3. Notar que

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$

e por tanto no limíte $r \to 0, R \to \infty$ não temos contribução destes semi-círculos. Notar que pela escolha do ramo do log vale $\log(-x) = \log x + i\pi$, assim que

$$\begin{aligned} 2\pi i Res_{ia} f = \frac{\pi(\log a + i\pi/2)}{a} &= \lim_{r\to 0} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{-r} f(z)dz + \int_R^r f(z)dz \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$J = \frac{\pi \log a}{2a}.$$

5.9 Convergência de Funções Holomorfas

Notas por Igor Soares

5.9.1 Convergência Uniforme em Compactos

Seja U domínio (aberto e conexo) em $\mathbb{C}$, e uma sequência de funções $(f_n)_n$, Holomorfas, por enquanto podemos supor que elas são apenas contínuas ou limitadas.

Definição 37. (Convergência uniforme em compactos) Diremos que essa sequência de funções $(f_n)_n$ converge uniformemente em conjuntos compactos para f (notação $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$) se para todo K compacto, vale:

$$||f_n - f||_{K,0} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Onde na esquerda temos a norma uniforme em K,

$$\sup_{x\in K} |f_n - f(x)| = ||f_n - f||_{K,0}$$

Observação.

- Todo subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ aberto é σ-compacto, isto é:

  Existe uma sequência enumerável de compactos $\{K_i\}_{i=1}^\infty$, de forma que $K_i \subset K_{i+1} \subset U$, para todo i; Além disso, $U = \bigcup_i K_i$.

- Se escrevemos $U = \bigcup_i K_i$, como união de compactos é fácil ver que para qualquer compacto $K \subset U$ temos que existe um i de forma que $K \subset K_i$.

Assim podemos concluir que se $||f_n - f||_{K_i,0} \underset{n}{\longrightarrow} 0$ para todo i, então temos $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$.

Proposição 79. *Se f_n holomorfa e $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$ então $f \in H(U)$.*

Demonstração. Como a convergência é uniforme então o limite é uma função contínua, para mostrar que são holomorfas podemos usar o teorema de Morera[44], já que a integral de f em triângulos pequenos pode ser a aproximada por integrais de f_n que sempre são zero por serem holomorfas.

■

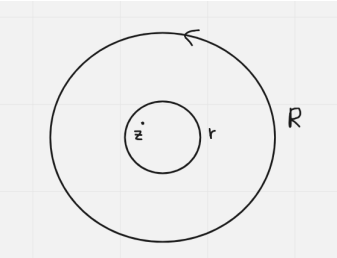
Proposição 80. *Se f_n holomorfa e $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$, então temos que $f_n' \underset{K}{\rightrightarrows} f'$, por indução podemos mostrar que $f_n^{(r)} \underset{K}{\rightrightarrows} f^{(r)}$.*

Demonstração. Mostraremos que se $\overline{D}(p,r) \subset U$, então temos que:

$$||f_n' - f'||_{\overline{D(p,r)}} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

É suficiente mostrar isso pois, cada compacto se cobre com uma quantidade finita de discos fechados, e se temos convergência uniforme em cada um deles então teremos convergência uniforme em uma união finita deles.

Para isso, considere $R > r$, de forma que $\overline{D}(p,R) \subset U$ e $z \in \overline{D}(p,r)$



Seja C_R o círculo de raio R orientado positivamente. Então podemos calcular a distância usando a fórmula integral de Cauchy[4.3]:

$$\begin{aligned} |f_n'(z) - f'(z)| \leq & \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(w) - f_n(w)|}{|w-z|^2} d|w| \\ \leq & \frac{R}{(R-r)^2} ||f - f_n||_{C_R} \underset{n}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

■

Corolário 81. *(Teorema de Hurwitz) Seja U domínio e $(f_n)_n$ sequência de funções holomorfas de forma que:*

- $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$
- $Z(f_n) = \emptyset, \forall n$

Então temos duas possibilidades: Ou $f \equiv 0$*, ou* $Z(f) = \emptyset$

Demonstração. Assuma $f \not\equiv 0$, então $Z(f)$ é discreto.

Dado um $p \in U$, existe um r de forma que $\overline{D}(p, r) \subset U$ e $f\big|_{C_r}$ não possui nenhum zero. Isso é possível pois o conjunto de zeros é formado por pontos isolados.

Logo $\frac{1}{f_n} \underset{C_r}{\rightrightarrows} \frac{1}{f}$ além disso, pela proposição anterior $f_n' \underset{C_r}{\rightrightarrows} f'$.

Logo,

$$\frac{f_n'}{f_n} \underset{C_r}{\rightrightarrows} \frac{f'}{f}$$

Assim pelo princípio do Argumento[73] temos:

$$0 = \lim_n \int_{C_r} \frac{f_n'}{f_n} = \int_{C_r} \frac{f'}{f}$$

Assim podemos concluir que C_r não contém nenhum zero de f em seu interior, em particular $f(p) \neq 0$ ■

Corolário 82. *Seja* $(f_n)_n \subset H(U)$*,* U *domínio,* $f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$*, além disso suponha* f_n *injetiva em* U*.*

Então temos duas opções: Ou f *é constante, ou é injetiva.*

Demonstração. Assuma $f(p) = f(q)$, toma $r < |p - q|$ e defina $g_n(z) = f_n(z) - f_n(p)$ no disco $D(q, r)$, temos que $Z(g_n) = \emptyset$, pois tomamos o r pequeno o suficiente para não conter p.

$$g_n \underset{K}{\rightrightarrows} (f - f(p))$$

Assim como $f - f(p)$ tem um zero em $D(q, r)$ pelo corolário anterior temos que $f \equiv f(p)$.

■

Considere uma sequência de compactos $(K_i)_{i \geq 0}$, $K_i \subset U, \forall i$.

De forma que

$$K_i \subset K_{i+1} \subset U$$
$$\bigcup_i K_i = U$$

Defina a distância entre funções Holomorfas (ou contínuas):

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{||f-g||_{K_i}}{1+||f-g||_{K_i}}$$

Exercício:

Mostre que d é de fato uma distância em $H(U)$ (respectivamente $C(U)$), mostre além disso que $d(f_n, f) \underset{n}{\longrightarrow} 0 \iff f_n \underset{K}{\rightrightarrows} f$.

Assim a topologia compacto aberta é dada por uma métrica d.

5.9.2 Famílias Normais

Vamos recordar alguns conceitos:

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções contínuas, $\mathcal{F} \subset C(U) = C(U, \mathbb{C})$ é dita:

- **Pontualmente Limitada** se $\forall x \in U \quad \exists M_x > 0$ de forma que $|f(x)| < M_x$, para toda $f \in \mathcal{F}$
- **Equicontínua** Se $\forall x \in U$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ de forma que $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y) < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$
- **Uniformemente Equicontínua** Se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$, $\forall x \in U$ de forma que $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y) < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$

Exercício:

1. Se temos uma família $\mathcal{F}$ equicontínua em $K \subset U$ então a família é uniformemente equicontínua em K
2. $\mathcal{F}$ equicontínua e pontualmente limitada implica $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada em compactos, isto é :

$$K \subset U \text{ Compacto} \implies \sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{0,K} < \infty$$

Teorema 83. *(Arzela - Ascoli)*

Seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto, $\mathcal{F} \subset C(K)$ então $\mathcal{F}$ é sequencialmente compacto se e somente se, é equicontínua, limitada e fechada.

Uma consequência desse teorema é que dado U aberto, $\mathcal{F} \subset C(U)$ equicontínua e limitada pontualmente, então qualquer sequência tem subsequência $(f_{\varphi(n)})_n$ que converge em um subconjunto compacto de U.

$$f_{\varphi(n)} \underset{K}{\rightrightarrows} f$$

Observação. f pode não estar em $\mathcal{F}$.

Definição 38. $\mathcal{F} \subset H(U)$ é dita **normal** se para qualquer sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência convergente em compactos de U.

Corolário 84. *$\mathcal{F} \subset H(U)$ equicontínua e pontualmente limitada, então $\mathcal{F}$ é normal.*

Teorema 85. *(Montel)*

$\mathcal{F} \subset H(U)$ limitada em conjuntos compactos de U, então $\mathcal{F}$ é normal.

Demonstração. Considere $\overline{D}_{2r} = \overline{D}(p, 2r) \subset U$, $\overline{D}_r = \overline{D}(p, r)$.

Afirmação: *$\mathcal{F}$ é equicontínua.*

Para demonstrar a afirmação toma $f \in \mathcal{F}$ e toma $z, w \in \overline{D}_r$, então vale a igualdade pela fórmula de Cauchy[4.3]:

$$f(z) - f(w) = \frac{z-w}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - w)} d\xi$$

Portanto:

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{z-w}{r} \cdot M_r = a_r |z - w|$$

Onde $M_r = \sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{\overline{D}_r}, 0$

Como a_r não depende da função, somente do disco, temos que a família é lipschitziana com a mesma constante, logo a família é equicontinua.

O resultado segue usando equicontinuidade em U e usando o corolário anterior. ■

Capítulo 6

Geometria Hiperbólica

6.1 Transformações de Möbius

Vamos a estudar as propriedades básicas de certo de tipo de transformação.

Definição 39. Dezimos que $M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ é uma transformação de Möbius ($M \in \mathcal{M}$öb) se existem $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ com $ad - bc \neq 0$, e tais que

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Acima estamos tomando como convenção que

$$M(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0. \end{cases}$$

Claramente M é meromorfa em $\hat{\mathbb{C}}$, e

$$M'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad z \neq \infty, -\frac{d}{c}.$$

Suponha que $c \neq 0$: então $M(-\frac{d}{c}) = \infty$, e podemos utilizar a carta local $\phi : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \phi(z) = \frac{1}{z}$. Definimos $\hat{M} = \phi \circ M$, que é uma transformação de Möbius, e satisfaz $\hat{M}(-\frac{d}{c}) = 0$,

$$\hat{M}'(z) = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}; \quad \text{em particular } \hat{M}(-\frac{d}{c}) = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0.$$

O caso $z = \infty$ se estuda de forma análoga. A consequência é que M é derivável no sentido complexo em todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$, com $M'(z) \neq 0$.

Observação. Pode se verificar diretamente (ver a parte seguinte) que $M \in \mathcal{M}$öb é invertível, com inverta $M^{-1} \in \mathcal{M}$öb, e em particular é conforme.

Com o anterior vemos (a identidade é uma transformação de Möbius) que $\mathcal{M}$öb é um grupo. O grupo de transformações de Möbius também se denomina *grupo projetivo linear*. Para entender este nome, lembremos que pdemos identificar $\hat{\mathbb{C}}$ com a linha projetiva complexa:

$$\mathbb{PC} = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}/\sim \quad (z_1, w_1) \sim (z_2, w_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda(z_1, w_1) = (z_2, w_2).$$

A classe de (z, w) se escreve em coordenadas projetivas como $[z : w]$, e o mapa $\Phi : \mathbb{PC} \to \hat{\mathbb{C}}$ dado por $\Phi([z : w]) = \frac{z}{w}$ é um bi-holomorfismo. Utilizando esta identificação, a transformação de Möbius M corresponde a um par de mapas lineares, $[z : w] \to [az + b : cz + d]$.

6.1.1 Representação do grupo de transformações de Möbius

Dada $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, podemos observar que se $\Lambda \neq 0$, então $M(z) = \frac{(\lambda a)z+(\lambda b)}{(\lambda c)z+(\lambda d)}$. Tomando $D = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ (qualquer raíz), obtemos que podemos escrever

$$\mathcal{M}\text{öb} = \{M(z) = \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1\}$$

Observe que a condição acima no determina unívocamente a, b, c, d (exemplo: $Id(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = \frac{(-1)z+0}{0z+(-1)}$)).

Perceba que podemos escrever,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} \frac{a}{c}\left[\frac{z+b/a}{z+d/c}\right] = \frac{a}{c}\left[1 - \frac{1}{a(cz+d)}\right] & a, c \neq 0 \\ \frac{1}{cz+d} & a = 0 \\ az + b & c = 0 \end{cases}$$

e por tanto, qualquer $M \in \mathcal{M}$öb é composição de

- traslações $z \mapsto z + b$.
- rotações $z \mapsto e^{i\theta} z$.
- dilatações $z \mapsto rz$, $r > 0$.
- a inversão $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Isto mostra em particular que M é invertível, com inversa em $\mathcal{M}$öb, e por tanto $\mathcal{M}\text{öb} < \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, onde

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \{f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : f \text{ bi-holomorfa}\}.$$

Consideremos agora $\Phi : \text{Sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}$öb,

$$\Phi(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]) = M \quad M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

O leitor pode verificar mediante um simples cálculo que

- $\Phi(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]) = Id.$
- $\Phi(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right]) = \Phi(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]) \circ \Phi(\left[\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right])$

é dizer Φ é um morfismo de grupos, que é claramente sobrejetor. Além disso, $\ker(\Phi) = \{\pm[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}]\}$, e por tanto, como grupos $\mod \approx \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})/\{\pm Id\}$.

Definição 40. O grupo $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})/\{\pm Id\}$ é o grupo especial projetivo complexo. O subgrupo $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{R}) < \mathrm{PSl}(2,\mathbb{C})$ que corresponde a classes tais que seus representantes tem coeficentes reais é o grupo espcial projetivo real.

De agora em mais escreveremos $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{C}) = \mathcal{M}\text{öb}$.

Proposição 86. *$M \in \mathcal{M}$öb, então M envia círculos em $\hat{\mathbb{C}}$ (é dizer, um círculo ou uma reta em $\mathbb{C}$) em círculos em $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Isto é claro se M é traslação, rotação ou dilatação. Assim, pela forma de uma $M \in \mathcal{M}$öb geral, e suficente verificar o caso quando $M(z) = \frac{1}{z}$. A equação de um círculo/reta em $\mathbb{C}$ é dada por

$$a|z|^2 + b + \Re(bz) + c = 0 \quad a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}, |b|^2 - ac > 0.$$

Aplicando $M(z) = \frac{1}{z} = w$ obtemos,

$$\frac{a}{|w|^2} + \Re(\frac{b}{w}) + c = 0,$$

e como $\Re(\frac{b}{w}) = \frac{1}{|w|^2}\Re(\bar{b}w)$, obtemos

$$a + \Re(\bar{b}w) + c|w|^2 = 0, \quad |\bar{b}|^2 - ac > 0$$

o que é a equação de um círculo/reta em $\mathbb{C}$. ■

6.1.2 O grupo especial projetivo real

Consideramos $A = [\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}] \in \mathrm{PSl}(2,\mathbb{R})$, e observemos que a transformação de Möbius M_A que ela define envia $\mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ em ele mesmo, pois

$$\Im(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}.$$

Observemos também que $M_A(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Definição 41. $\mathbb{H}$ se denomina plano hyperbólico.

Proposição 87. *Seja $M \in \mathcal{M}$öb que envia $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Então $M = M_A$ para $A \in \mathrm{PSl}(2,\mathbb{R})$.*

Demonstração. Escrevemos $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$. Se $c \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\infty} M(x) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R},$$

e como $M(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $M'(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Assim,

$$M'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2} \Rightarrow \begin{cases} c^2 \in \mathbb{R} & d = 0 \\ (cx+d)^2 = c^2x^2 + 2cdx + d^2 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} & d \neq 0. \end{cases}$$

O primeiro caso $d = 0$, podemos escrever

$$M(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c/bz}$$

e como $bc = -1$, $c/b = c^2/-1 \in \mathbb{R}$, o que mostra que M pode se escrever com coeficentes reais. No segundo caso, $d \neq 0$, temos $d^2 \in \mathbb{R}$ $(x = 0)$ e fazendo $x = 1, x = -1$ obtemos que $c^2, cd \in \mathbb{R}$, por tanto $\frac{c}{d} = \frac{cd}{d^2} \in \mathbb{R}$. Como $ad - bc = 1, \frac{b}{c} \in \mathbb{R}$ e no final podemos escrever M com coefficentes reais:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a/cz + b/c}{z + d/c}.$$

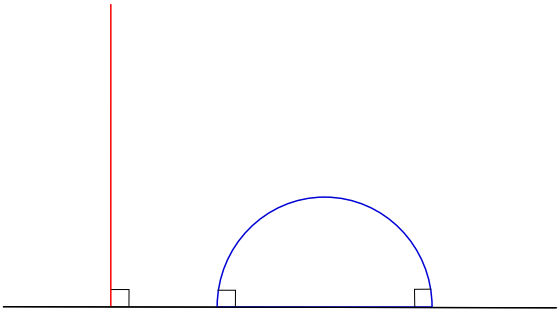
Se agora $c = 0$, M é linear e o resultado é claro. ■

6.2 Propriedades geométricas das transformações de Möbius

Notas por Pedro B.

Agora que sabemos como são as transformações de Möbius veremos suas propriedades geométricas. Primeiros definiremos o que são linhas retas no plano hiperbólico.

Definição 42. Uma reta não euclidiana em $\mathbb{H}$ é uma reta vertical ou a interseção de um círculo co centros no eixo real com $\mathbb{H}$:



Denotamos por $\mathcal{N}_{hp}$ o conjunto de todas essas linhas.

A definição acima pode parecer estranha, mas na verdade ela é bem natural, umas vez que as linhas acima representam geodésicas com respeito a uma certa *métrica Riemanniana*, como veremos mais tarde.

É imediato que $PSL_2(\mathbb{R})$ age em $\mathcal{N}_{hp}$: para $A \in PSL_2(\mathbb{R})$, M_A preserva ângulos e o eixo real, logo retas perpendiculares ou círculos com centro no eixo real em retas não-euclidianas. A seguir veremos que essa ação é transitiva, isso é, só existe uma órbita!

Proposição 88. *Dados $z_1, z_0, z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ dois a dois distintos existe uma únnica transformação de Möbius M tal que*

$$M(z_0) = 0, \quad M(z_1) = 1 \quad e \quad M(z_\infty) = \infty$$

Demonstração. Primeiro note que z_0, z_1, z_∞, a transformação

$$M(z) := \frac{z - z_0}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0}$$

satisfaz a condição desejada.

Para unicidade veja que caso M tenha três ou mais pontos fixos, então M é a identidade, já que a equação

$$M(z) = z$$

se reduz a uma equação de segundo grau. Logo, se $M(z_i) = M'(z_i)$, então $0, 1$ e ∞ são pontos fixos de $M' \circ M^{-1}$ e portanto $M = M'$. ■

Corolário 89. *A ação de $\mathcal{M}$öb em $\mathbb{C}$ é 3-transitiva, isso é, dadas duas triplas z_1, z_2, z_2 e w_1, w_2, w_3 de números dois a dois distintintos, então existe $M \in \mathcal{M}$öb tal que $M(z_i) = w_i$.*

Demonstração. Sejam $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$öb tais que $M_1(z_1) = 0, M_1(z_2) = 1$ e $M_1(z_3) = \infty$ e $M_2(w_1) = 0, M_2(w_2) = 1$ e $M_2(w_3) = \infty$, então

$$M_2 \circ M_1^{-1}$$

é a transformação desejada. ■

Agora podemos mostrar que a ação de $PSL_2(\mathbb{R})$ é transitiva em $\mathcal{N}_{hp}$.

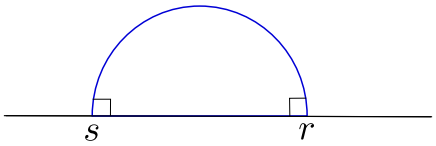
Proposição 90. *a ação de $PSL_2(\mathbb{R})$ é transitiva em $\mathcal{N}_{hp}$*

Demonstração. Seja $\overrightarrow{oy}$ o eixo y. É suficiente mostrar que para para qualquer reta $L \in \mathcal{N}_{hp}$ existe $A \in PSL_2(\mathbb{R})$ tal que

$$M_A(\overrightarrow{oy}) = L.$$

No caso em que L é uma vertical, basta tomar uma translação.

Suponha então que L seja um semi-círculo da forma



então transformaçãoM_A associada a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 1 & r \end{pmatrix}$$

mapeia $\overrightarrow{oy}$ nesse círculo. ■

Outras noção importante sobre as transformações de Möbius é aquela de razões cruzadas:

Definição 43. Para $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ dois a dois distintos, definimos

$$[z : z_1 : z_2 : z_3] = M(z)$$

onde M é a única transformação de Möbius tal que $M(z_1) = 0, M(z_2) = 1$ e $M(z_3) = \infty$. $[z : z_1 : z_2 : z_3]$ é chama da razão transversal de z, z_1, z_2 e z_3.

Proposição 91. *Para $M \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ temos que*

$$[z : z_1 : z_2 : z_3] = [Mz : Mz_1 : Mz_2 : Mz_3]$$

Demonstração. Seja $M' \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ tal que

$$[z : z_1 : z_2 : z_3] = M(z)$$

então

$$M' \circ M^{-1}$$

é tal que $Mz_1 \mapsto 0, Mz_1 \mapsto 1$ e $Mz_3 \mapsto \infty$, logo

$$[z : Mz_1 : Mz_2 : Mz_3] = M' \circ M^{-1}(z)$$

■

Corolário 92. *Temos que $z, z_1, z_2, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ estão em uma mesma linha/círculo (círculos em $\hat{\mathbb{C}}$) se, e somente, $[z : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que $z, z_1, z_2, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ estão em uma mesma linha L, então existe $M \in \mathcal{M}\ddot{o}b$ tal que $M(L) \in \mathbb{R}$, então

$$[z : z_1 : z_2 : z_3] = [Mz : Mz_1 : Mz_2 : Mz_3]$$

e como $Mz_i \in \mathbb{R}$, $[Mz : Mz_1 : Mz_2 : Mz_3] \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $M(z) = [z : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{R}$, então $M^{-1}(\mathbb{R})$ é um círculo em $\hat{\mathbb{C}}$ que contêm nossos pontos. ■

Bem, nós vimos muitas propriedades interessantes das transformações de Möbius, agora podemos nos perguntar, como são outros automorfismos da esfera de Riemann, mas o resultado abaixo nos diz que os únicos automorfismos são as transformações de Möbius!

Teorema 93. *$Aut(\hat{\mathbb{C}}) = \mathcal{M}\ddot{o}b$.*

Demonstração. Sabemos que qualquer função meromorfa em $\mathbb{C}$ é racional (a razão de dois polinômios), logo para $M \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$,

$$M(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mas o fato que existe M^{-1} implica que $\deg Q = \deg P \leq 1$, e portanto M é de Möbius. ■

6.3 Automorfismos do Disco e do Plano Hiperbóico

Agora veremos como são os automorfismo do plano hiperbólico $\mathbb{H}$ e do disco $\mathbb{D}$, começando com o famoso Lema de Schwartz:

Teorema 94 (Lema de Schwartz)**.** *Seja $f : \mathbb{D} \to \bar{\mathbb{D}}$ holomorfa com $f(0) = 0$, então valem*

(i) $|f(z)| \leq |z|$;

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Além disso vale a igualdade em algum dos dois itens para algum z se, e somente se, $f(z) = \lambda z$ onde $\lambda \in S^1$.

Demonstração. Defina a função

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Ela possui um singularidade removível em $z = 0$ e portanto é holomorfa em $\mathbb{D}$. Seja $D_r = \{z \mid |z| \leq r\}$, pelo princípio do máximo, temos que

$$|g(z)| \leq \max_{z \in \partial D_r}\{|g(z)|\} = \max_{z \in \partial D_r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1/r$$

logo fazendo $r \to 1$, obtemos que $g(z) \leq 1$.

Agora suponha que $f'(0) = 1$ ou $|f(z)| = |z|$ para algum $z \in \mathbb{D}$, então a função g definida acima atinge seu módulo máximo em algum ponto no interior de seu domínio, e , novamente pelo módulo máximo, g é uma constante λ com $|\lambda| = 1$, logo, pela definição de g, $f(z) = \lambda z$. ■

Veja que o Lema de Schwartz admite uma generalização imediata para discos com raio qualquer. Se $\mathbb{D}_R$ e $\mathbb{D}_B$ são discos centrados na origem com raios R e B, temos que uma função

$$f : \mathbb{D}_R \longrightarrow \bar{\mathbb{D}}_B$$

induz uma função

$$1/B \circ f \circ R : \mathbb{D} \longrightarrow \bar{\mathbb{D}}$$

$$z \mapsto f(R \cdot z)/B$$

e assim temos as desigualdades $|f(z)| \leq \frac{B}{R} \cdot |z|$ e $|f'(0)| \leq \frac{B}{R}$

Agora utilizaremos o Lema de Schwartz para descrever completamente como são os automorfismos do disco.

Teorema 95. *Seja $T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bi-holomorfa, então*

$$T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

com $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Demonstração. Para $\alpha \in \mathbb{D}$, defina a transformação de Möbius

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Nesse caso vale que $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\alpha}$ e que $\varphi_\alpha(S^1) = S^1$, além disso $\varphi(\alpha) = 0$, portanto $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Seja $T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bi-holomorfa, então existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que $T(\alpha) = 0$. Considere o automorfismo

$$S = T \circ \varphi_{-\alpha}.$$

Essa função é tal que $S(0) = 0$, logo estamos sob as hipóteses do Lema de Schwartz., e portanto vale

$$|z| = \left|S(S^{-1}z)\right| \leq \left|S^{-}1(z)\right| \leq |z|$$

e então $S(z) = \lambda \cdot z$. Sendo assim, $T = e^{i\theta} \cdot \varphi_\alpha \in \mathcal{M}\text{öb}$. Uma simples conta mostra que transformações assim da da forma $T(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$. ■

Observação. O teorma acima nos mostra que temos uma correspondência

$$Aut(\mathbb{D}) \longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

que se verifica ser um isomorfismo de grupos. Esse segundo grupo é denotado por $SU(1,1)$, uma generalização do grupo $SU(1)$.

Com esse resultado mostraremos agora a cara dos automorfismo do plano hiperbólico $\mathbb{H}$.

Teorema 96. *Os automorfismo do hiperbólico são as transformações de Möbius com coeficientes reais, em outras palavras*

$$Aut(\mathbb{H}) \cong PSL_2(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Considere a transformação de Cayley

$$T : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Ela é tal que $T(\mathbb{R}) = S^1$ e que $T(i) = 0$ (fronteiras são mandadas em fronteiras), logo $T(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. Logo T é uma função bi-holomorfa entre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$.

Seja $f \in Aut(\mathbb{H})$, então $T \circ f \circ T^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$, e portanto f é de Möbius já que T e T^{-1} também são. Como fronteiras são mandadas em fronteiras sabemos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, logo essa transformação de Möbius deve ter coeficientes reais. ■

Capítulo 7

Funções harmônicas

Nesta parte $U \subset \mathbb{C}$ denota um domínio, e

$$\mathscr{Har}(U) = \{u : U \to \mathbb{R} : u \text{ harmônica}\}.$$

Lembrar que pelo corolário 22, toda $u \in \mathscr{Har}(U)$ é localmente a parte real de uma função holomorfa, e em particular satisfaz as seguintes propriedades:

1. $u \in \mathcal{C}^\infty$.
2. Propriedade do valor médio (PVM): se $\bar{D}(p, r) \subset U$,
$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta.$$
3. Princípio do máximo: se u tem um máximo relativo em p, então u é constante. O mesmo vale para o mínimo, pois $-u \in \mathscr{Har}(U)$.

Uma propriedade interessante é que compor uma função harmônica com uma função holomorfa mantém a propriedade de ser harmônica. Suponha que $u \in \mathscr{Har}(U)$ e $f : V \to U$ é holomorfa: então localmente $u = \Re(g)$ e $u \circ f = \Re(g \circ f)$ é harmônica.

7.1 Representação integral

Fixamos $D = D(0, R)$ e consideramos $u = \Re f : D \to \mathbb{R}$ uma função harmônica. Podemos escrever

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad z \in D$$
$$\therefore u(z) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \bar{a_n} \bar{z}^n$$

Se $z \in D$ temos $z = re^{i\theta}$ com $0 < r < R$ e

$$u(re^{i\theta}) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n e^{in\theta} + \bar{a_n} e^{-in\theta})$$

Podemos obter os coefficentes integrando e utilizando a ortogonalidade das exponenciales,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int u(re^{i\theta})d\theta$$
$$\frac{r^n a_n}{2}\frac{1}{2\pi}\int u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta,\ n\geq 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2\pi}\int u(re^{i\theta})(re^{-i\theta})^{-n}d\theta$$

Podemos então escrever, para $|z|<r$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\left\{1+2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{re^{i\theta}}\right)^n\right\}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}+z}d\theta$$

onde intercambiamos serie e integral utilizando a convergência uniforme.

Definição 44. O núcleo de Poisson é

$$P_r(z,\theta) = \Re\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}+z} = \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}.$$

Obtemos assim a seguinte representação integral.

Proposição 97. *Se $u\in\mathscr{D}(0,\mathscr{R})$, então para $0<r<R$, $|z|<r$*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})P_r(z,\theta)d\theta.$$

Observação.

1. Fazendo $z=0$, obtemos PVM.
2. Fazend $u\equiv 1$, deduzimos
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(z,\theta)d\theta = 1.$$

Corolário 98 (Estimativas de Harnack)**.** *Suponha que $u\in C(\overline{D}(0,r))$, harmônica no interior do disco e positiva. Então, para todo $|z|<r$ temos*

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}u(0)\leq u(z)\leq \frac{r+|z|}{r-|z|}u(0).$$

Lembremos do Exemplo 4 que para uma função u e uma curva $t\mapsto z(t)=x(t)+iy(t)$ com vetor unitário normal $\vec{n}$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}d|z| = *du.$$

Por outro lado, um cálculo direto (ver [2]) mostra que se $u,v\in\mathscr{Har}(U)$, temos que a forma $u*dv - v*du$ é fechada. Assim, pelo Teorema de Cauchy:

Proposição 99. *Se $u, v \in \mathscr{Har}(U)$ e $\Gamma \sim 0$ ciclo homôlogo a zero em U,*

$$\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d|z| = 0.$$

Exemplo 13. Seja $U = A(0, R_1, R_2)$, e seja $u \in \mathscr{Har}(U)$. A função $v(z) = \log|z|$ é harmônica em U, e se $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ o ciclo $\Gamma = C_{r_1} \cup -C_{r_2}$ é homôlogo a zero em U, onde C_r é o círculo de centro zero e raio r orientado em sentido direto, no quanto $-C_r$ denota o mesmo círculo com a orientação oposta. Para $|z| = r$ temos $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d|z| = r\frac{\partial u}{\partial r} d\theta$, por tanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_1 e^{i\theta})d\theta - \frac{\log r_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_1\frac{\partial u}{\partial r}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_2 e^{i\theta})d\theta - \frac{\log r_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_2\frac{\partial u}{\partial r}d\theta.$$

Concluímos que para todo $R_1 < r < R_2$ a quantidade

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta - \frac{\log r}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta$$

é constante, e podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = a(r)\log r + b, \quad a(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta.$$

Por outro lado podemos calcular com o mesmo mêtodo $a(r)$ utilizando $v \equiv 1$ e obtemos que $a(r) = a$ constante. Se u é harmônica em $D(0, R_2)$ fazemos $r = 0$ e obtemos $a = 0$; em geral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = a\log r + b.$$

7.2 O problema de Dirichlet

Suponha que U é um domínio plano, e $h : \partial U \to \mathbb{R}$ é continua.

Pergunta 1. Existe $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ harmônica em U, com $u|_{\partial U} = h$?.

Comezamos assumindo $U = D(0, 1)$ e para funções $h \in C(\overline{U})$ definimos

$$P[h](z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}d\theta.$$

Lembar: Se $f : D(0, 1) \to \mathbb{C}$ é holomorfa, e $g : D(0, 1) \to \mathbb{R}$ é continua, então

$$P(z) := \frac{1}{2\pi}f(z)g(e^{i\theta})d\theta$$

é holomorfa em $D(0, 1)$. Ver Lema 70.

Concluimos que $P[h]$ é a parte real de uma função holomorfa, por tanto harmônica. Assim, temos um operador $P : C(\overline{D}) \to \mathscr{Har}(D)$, que claramente é linear, positivo (por tanto, limitado se utilizamos a norma uniforme nos dois espaços), e $P[1] = 1$, pois 1 ê harmônica.

Teorema 100 (Schwartz)**.** *Seja $h \in C(\partial D(0,1))$ e defina*

$$Q[h](z) = \begin{cases} P[h](z) & |z| < 1 \\ h(z) & |z| = 1 \end{cases}$$

Então $Q[h] \in C(\overline{D}(0,1))$, e é a ûnica solução ao problema de Dirichlet em $D(0,1)$ com $Q[h]|_{\partial D(0,1)} = h$.

Demonstração. Considere primeiro o caso quando $h(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}$ é um polinômio trigonométrico. Neste caso h é harmônica em $D = D(0,1)$, e $Q[h] = h$ em D. Em geral se $h \in C(\partial D)$ considere uma sequência de polinômios trigonométricos (h_n) que convergem uniformemente à h. Pelo princípio do máximo, as funções harmônicas atingem seu maxímo na fronteira de seu domínio, e por tanto

$$\|Q[h] - Q[h_n]\|_{\overline{D}} = \|Q[h - h_n]\|_{\overline{D}} = \|h - h_n\|_{\partial D} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Isto mostra que $Q[h]$ é continua em $\overline{D}$, e por tanto solucação ao problema de Dirichlet com data h.

Para a unicidade é suficente mostrar que se $h \equiv 0$ então $H = Q[h] \equiv 0$. Já sabemos que $H \in C(\overline{D}) \cap \mathscr{H}\mathscr{a}\mathscr{r}(D)$. Suponha por absurdo que $H(p) > 0$ e fixe $0 < \epsilon < H(p)$. Defina

$$K(z) = H(z) + \epsilon|z|^2 = H(z) + \epsilon z\bar{z}$$

e perceba que

- $K \in C(\overline{D})$, diferenciável no interior.
- $K(p) \geq H(p) > \epsilon$
- $K \equiv \epsilon$ em ∂D

Deduzimos que K tem um máximo local em um pto $q \in D$, e por tanto necessáriamente

$$\partial_{xx}K(q) \leq 0, \partial_{yy}K(q) \leq 0 \Rightarrow \Delta K(q) \leq 0$$

o qual é absurdo pois $\Delta K(q) = 4\epsilon$. Deduzimos que $H \leq 0$ em D, e similarmente $H \geq 0$, por tanto $H \equiv 0$ como queriamos mostrar. ■

Observação. Pela discussão anterior, note que dada $h : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ continua, a função harmônica $u : D(0,1) \to \mathbb{R}$ que determina está dada por

$$u(z) = \sum_{n\geq 0}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) z^n + \sum_{n\geq 1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \right) \bar{z}^n.$$

7.3 A propriedade do valor médio

Já observamos que se u harmônica, então tem a PVM.

Teorema 101. *Seja $u : U \to \mathbb{R}$ continua com a PVM. Então $u \in \mathscr{H}\mathscr{a}\mathscr{r}(U)$.*

Demonstração. O fato de u ser harmônica é uma propriedade local, asssim que sem pêrda de generalidade podemos assumir $U = D(p, R)$. Tomamos $0 < r < R$ e seja v a única função harmônica em $D(0, r)$ que extende continuamente à fronteira de $D(0, r)$ com $v|_{|z-p|=r} = u|_{|z-p|=r}$. Consideramos $h = u - v$ em $\overline{D}(0, r)$: h é continua e tem a PVM, em particular satisfaz o princípio do máximo (mínimo). Como h se anula em $\partial D(0, r)$ é idênticamente nula, e por tanto $u = v$ é harmônica em $D(0, r)$. ■

Corolário 102. *Seja $(u_n)_n \subset \mathscr{Har}(U)$ que convergem uniformemente em compactos a um função u. Então u é harmônica em U.*

Finalizamos esta parte com o seguinte importante Teorema.

Teorema 103 (Princípio de Harnack)**.** *Considere $U = D(0, r)$ e seja $(u_n)_n \in C(\overline{(}D(0, r))) \cap \mathscr{Har}(D(0, r))$ família monótona: $u_n \leq u_{n+1}$ para todo n. Então se cumple uma e so uma das seguintes possibilidades.*

1. *Existe $u \in \mathscr{Har}(D(0, r))$ tal que $(u_n)_n$ converge uniformemente em compactos à u, ou*
2. *$(u_n)_n$ converge uniformemente em compactos à ∞.*

Demonstração. Definimos o limite pontual $u(z) := \lim_n u_n(z)$ e consideramos os conjuntos

$$A = \{z : u(z) = \infty\}$$
$$B = \{z : u(z) < \infty\}$$

Utilizando as desiguldades de Harnack vemos que

- A, B abertos
- a convergência é uniforme en compactos.

Pela conexidade $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, e pelo teorema anterior se $A = \emptyset$, a função u ê harmônica. ■

7.4 Funções supharmônicas

È conveniente relaxar a definição de função harmônica no seguinte sentido.

Definição 45. Dizemos que $u : U \to \mathbb{R}$ continua é

1. sub-harmônica se para todo domínio $V \subset U$ temos que $h \in \mathscr{Har}(V), h \leq u \Rightarrow h = u$ ou $h < u$.
2. super-harmônica se $-u$ é sub-harmônica.

Claramente se u é harmônica, então é sub- e super- harmônica.

Podemos dar a seguinte caracterização de funções sub-harmônicas.

Proposição 104. *Seja $u \in C(U)$. Então u é sub-harmônica se e somente se para todo domínio $V \subset U$ e $h \in \mathscr{Har}(U)$, a função $u + h$ verifica o princípio do máximo em V.*

Demonstração. Suponha primeiro que u é sub-harmônica, e considere $h \in \mathscr{H}\mathscr{a}\mathscr{r}(V), V \subset U$ domínio. Se existe $p \in V$ talque para todo $z \in V$ temos $u(z)+h(z) \leq M = u(p)+v(p)$, então $H(z) = M - h(z)$ é uma função harmônica que domina u, e $H(p) = u(p)$, por tanto $u(z) = H(z) \forall z \in V$ e $u + h = M$ constante em V.

Recíprocamente, suponha que $h \in \mathscr{H}\mathscr{a}\mathscr{r}(V)$ domina a u. Então $u - h \leq 0$, e $u + (-h)$ satisfaz o princípio do máximo, pelo qual se se anula em algum ponto coincide com a função nula (que é harmônica). ■

Corolário 105. *Se u é localmente sub-harmônica, então é sub-harmônica.*

Demonstração. O princípio do máximo local implica o princípio do máximo em domínios. ■

Fazendo $h \equiv 0$ na proposição anterior, deduzimos.

Corolário 106. *Se u é sub-harmônica, então verifica o princípio do máximo.*

Definição 46. Seja $u : U \to \mathbb{R}$ sub-harmônica, e $\overline{D} \subset U$ disco fechado em U. O harmonizado da u em D é a função $u^D : \overline{D} \to \mathbb{R}$ solução do problema de Dirichlet com data na fronteira ∂D dada pela u.

Proposição 107. *Uma função $u \in C(U)$ é sub-harmônica se e somente se para todo disco $D = D(p, r)$ com $\overline{D} \subset U$ vale*

$$u(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demonstração. Assumimos primeiro que u é sub-harmônica, e fixamos D. Considere o harmonizado u^D e perceba que $u - u^D$ satisfaz o princípio do máximo, e se anula em ∂D, por tanto

$$u(p) \leq u^D(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^D(p + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta}) d\theta.$$

Para o recíproco fixamos $h \in \mathscr{H}\mathscr{a}\mathscr{r}(V), V \subset U$ domínio se suponemos que $u + h$ tem máximo num ponto interior $p \in V$, com $M = u(p) + h(p)$. Definimos

$$V_M = \{z \in V : u(z) + h(z) = M\};$$

$V_M \subset D$ é não vazío e fechado em V. Dado qualquer $q \in V_M$ consideramos $D = D(q, r) \subset \overline{D} \subset V$; pela hipôteses temos

$$u(q) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(q + re^{i\theta}) d\theta$$

e como h é harmônica,

$$h(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(q + re^{i\theta}) d\theta$$

$$\Rightarrow M = u(q) + h(q) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(q + re^{i\theta}) + h(q + re^{i\theta}) d\theta \leq M.$$

Concluímos que $u(q+re^{i\theta})+h(q+re^{i\theta}) = M$ para todo $0 \leq r, \theta \in [0, 2\pi]$, e por tanto V_M aberto. Pela conexidade $V_M = V$, e $u+h$ satisfaz o princípio do máximo. Isto vimos que é equivalente ao fato de u ser sub-harmônica. ■

Corolário 108. *$u \in C(U)$ é sub-harmônica se e somente se para todo disco $D = D(p,r)$ com $\overline{D} \subset U$ vale $u \leq u^D$.*

Uma propriedade muito útil de funções sub-harmônicas é a seguinte: suponha que u, v são sub-harmônicas em U e considere $w = \max\{u, v\}$. Claramente w satisfaz a condição da propriedade anterior, e por tanto w é sub-harmônica. Em particular, o máximo de funções harmônicas é sub-harmônica.

Definição 47. Seja $\emptyset \neq \mathcal{F}$ família de funções sub-harmônicas em U. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família de Perron se

- $u \in \mathcal{F}$ e $D \subset U$ disco, então existe $v \in \mathcal{F}$ que é harmônica em D e com $u \leq v$.
- $u, v \in \mathcal{F}$ então existe $w \in \mathcal{F}$ com $\max\{u, v\} \leq w$.

Teorema 109 (Princípio de Perron)**.** *Seja $\mathcal{F}$ família de Perron em U. Então $u = \sup \mathcal{F}$ é constante igual ∞, ou harmônica.*

Demonstração. Pela conexidade, e como ser harmônica é uma propriedade local, podemos supor que $U = D(0,1)$. Fixamos um conjunto denso enumerável $\{z_j\}_j \subset D$, e para cada j denotamos

$$u(z_j) = \sup_{v \in \mathcal{F}} \{v(z_j)\}.$$

Escolhemos também uma sequência $\{v_{jk}\}_k \subset \mathcal{F}$, com $\lim_k v_{jk}(z_j) = u(z_j)$. Fixemos $K \subset \overline{K} \subset D$ disco fechado e procedemos assim:

- $j = 1$: escolhemos $v_1 \in \mathcal{F}$ harmônica em K, que domina a v_{11}.
- $j = 2$: escolhemos $v_2 \in \mathcal{F}$ harmônica em K, que domina $\max\{v_1, v_{12}, v_{21}\}$
- $j = n$: escolhemos $v_n \in \mathcal{F}$ harmônica em K, que domina

$$\max v_1, \cdots, v_{n-1}, v_{jk} : j, k \leq n.$$

A sequência $\{v_n\}_n \subset \mathcal{F}$ é crescente e pela construção, $\lim_n v_n \leq u$.

Pelo princípio de Harnack deduzimos que se $\lim_n v_n(z) = \infty$ então $\lim_n v_n \equiv \infty$ e $u \equiv \infty$ em K. Pela conexidade isto mostra que $u \equiv \infty$ em U.

Se não for assim, fixamos $v \in \mathcal{F}$ e calculamos

$$v(z_j) \leq u(z_j) = \lim_j v_{jk}(z_j) \leq \lim_n v_n(z_j) \Rightarrow v(z_j) \leq \lim_n v_n(z_j).$$

Como $\lim_n v_n$ é continua, e $\{z_j\}_j$ denso, temos $v \leq \lim_n v_n$, e $u \leq \lim_n v_n$, o que mostra que $u = \lim_n v_n$ é harmônica em K, e pela conexidade em todo D. ■

Bibliografia

[1] Lars Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. New York: McGraw-Hill, 1979 (ver p. 1).

[2] Jane P. Gilman, Irwin Kra e Rubí E. Rodríguez. *Complex Analysis*. Springer-Verlag GmbH, 2007. 220 pp. (ver pp. 1, 89).

[3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. MCGRAW HILL BOOK CO, 1986. 432 pp. (ver p. 1).

[4] Elon Lages Lima. *Curso de Análise, vol. 2*. 2000 (ver p. 31).