

# Prova de Yoccoz do teorema de Jakobson

*Pablo D. Carrasco Victor Janeiro*

6 de maio de 2021

ICEx - UFMG

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Propriedades dinâmicas de <math>f_c</math></b>	<b>6</b>
2.1	Sinopse . . . . .	6
2.2	Dinâmica básica . . . . .	7
2.3	Derivada Schwartziana . . . . .	8
2.4	Distorção . . . . .	10
2.5	Parâmetros $c < -2$ . . . . .	12
2.6	O parâmetro especial $c = -2$ . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Parâmetros Regulares e Mapas Bernoulli</b>	<b>15</b>
3.1	Sinopse . . . . .	15
3.2	Parâmetros e pontos regulares . . . . .	16
3.3	O operador de Perron-Frobenius . . . . .	21
3.4	Exponentes de Lyapunov . . . . .	23
3.5	Acip para $f$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Propriedade de Markov e Parâmetros Fortemente Regulares</b>	<b>26</b>
4.1	Sinopse . . . . .	26
4.2	Propriedade de Markov para o retorno . . . . .	27
4.2.1	Dinâmica de $f_c$ para $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ : . . . . .	29
4.3	Parâmetros Fortemente Regulares . . . . .	32
4.3.1	Dinâmica de $f_c$ para parâmetros fortemente regulares até o nível $K$ : . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Parâmetros Fortemente Regulares são Regulares</b>	<b>35</b>
5.1	Sinopse . . . . .	35
5.2	Intervalos singulares . . . . .	35
5.2.1	Intervalos Singulares Centrais . . . . .	36
5.2.2	Intervalos Singulares Periféricos . . . . .	38
5.2.3	Intervalos Singulares Laterais . . . . .	40

<b>6</b>	<b>Espaço de Parâmetros</b>	<b>45</b>
6.1	Sinopse . . . . .	45
6.2	Entendendo o Espaço de Parâmetros . . . . .	45
6.2.1	Estimativas no Espaço de Parâmetros . . . . .	48
6.2.2	Medidas no Espaço de Parâmetros . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Apêndice: Teorema do folkore e acips para mapas expansores</b>	<b>57</b>
7.0.1	Distorção . . . . .	59
	<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>

# Prefácio

Nestas notas abordamos uma prova dada por Yoccoz do famoso teorema de Jakobson: para um conjunto de medida (de Lebesgue) positiva de parâmetros  $c \in [-2, 0]$  o mapa  $f_c(x) = x^2 + c$  tem uma medida invariante absolutamente contínua, ergódica, e com expoente de Lyapunov positivo. A principal referência é [1].

O presente foi um trabalho de Iniciação Científica do segundo autor baixo a orientação do primeiro, na Universidade Federal de Minas Gerais durante o ano de 2020. Sugestões e indicações de erros são muito bem vindas.

# Capítulo 1

## Introdução

Um método poderoso para estudar sistemas dinâmicos consiste em estabelecer propriedades estatísticas das órbitas. Este é o enfoque da teoria ergódica, e na sua versão mais simples (e usual) consiste em mostrar a existência de uma medida invariante, preferencialmente com ‘boas’ propriedades. Nestas notas consideraremos a família de transformações (*família quadrática*)  $f_c(x) = x^2 + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c \in [-2, 0]$ , e mostraremos o seguinte.

**Teorema 1.0.1.** *Existe um conjunto  $\Lambda \subset [-2, 0]$  que satisfaz as propriedades seguintes:*

- $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\text{Leb}(\Lambda \cap [-2, -2+c])}{\text{Leb}([-2, -2+c])} = 1$ . Em particular  $\text{Leb}(\Lambda) > 0$ .
- Para  $c \in \Lambda$  existe uma medida invariante ergódica  $\mu_c$  absolutamente contínua. Esta medida está suportada no intervalo  $[f_c(0), f_c^2(0)]$ .
- A medida  $\mu_c$  tem expoente de Lyapunov  $\chi_c$  estritamente positivo.

**Definição 1.0.1.** *Abreviaremos medida invariante absolutamente contínua por suas siglas em inglês acip (absolutely continuous invariant probability).*

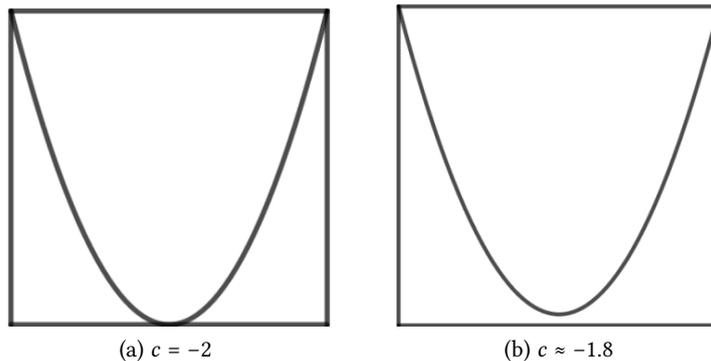
Para entender a ideia da prova começaremos lembrando a construção de acips para mapas expansores. Um mapa  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^1$  é expansor se  $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| > 1$ . Para evitar considerações especiais na fronteira assumiremos que  $f(0) = f(1) = 0$ , e portanto  $f$  define um mapa diferenciável no círculo  $f : S^1 \rightarrow S^1$ . Neste caso não é muito difícil mostrar que  $f$  é um mapa de cobrimento, e portanto existe uma partição  $\{[x_i, x_{i+1}] : i = 0, \dots, k-1\}$  de  $S^1$  tal que a restrição  $f| : (x_i, x_{i+1}) \rightarrow S^1 \setminus \{0\}$  é bijetora, e  $f(x_i) = 0 \forall i$  (se isto não estiver claro o leitor pode pensar no caso particular  $f(x) = k \cdot x \pmod{1}$ ).

Fixemos um destes intervalos  $I = [x_i, x_{i+1}]$ , e suponhamos que  $\mu = \rho dx$  é uma medida suportada em  $I$ , com  $\rho$  contínua (ou diferenciável). Pelo teorema de mudança de variáveis, a medida  $\mu_1 = f_*\mu = \rho_1 dx$ , onde  $\rho_1(x) = \frac{\rho \circ f^{-1}}{|f' \circ f^{-1}|}$ . Como  $f^{-1}$  contrai, o efeito de compor com ela tem a propriedade de distribuir  $\rho$  mais uniformemente, e como dividimos por uma função com derivada de módulo maior que um, a resultante tem uma variação menor que a da função original. Com tudo isto,  $\rho_1$  se distribui melhor que  $\rho$  a respeito da medida de Lebesgue.

O argumento agora pode se repetir com  $\mu_1$  (restringindo a cada  $[x_i, x_{i+1}]$ ), obtendo assim uma sequência de medidas  $(\mu_n = f_*\mu)_{n \geq 0}$  que se distribuem cada vez melhor com respeito à

medida de Lebesgue. As médias de Césaró das  $\mu_n$  tem portanto também esta propriedade, e é sabido que qualquer ponto de acumulação destas médias é uma medida invariante. Se o mapa  $f$  for suficientemente regular ( $C^2$  por exemplo), a boa distribuição das médias passa ao limite, e obtemos assim uma acip. Para conveniência do leitor, os detalhes deste argumento apresentam-se em um apêndice no final das notas.

Voltemos agora ao caso da família quadrática: nas figuras abaixo se mostra o gráfico sobre o (único) intervalo invariante maximal para  $c = -2$  e para  $c \approx -1.8$ .



Consideremos primeiro o caso  $c = -2$ . O mapa correspondente não é expansor no intervalo  $[-1/2, 1/2]$ . O maior obstáculo para a expansão uniforme é claramente o ponto crítico: pontos perto deste não terão expansão por um iterado. Mas observe que o ponto crítico não volta perto de si mesmo, e de fato sua imagem nunca retorna (em dois iterados chega num ponto fixo), o que implica que órbitas que eventualmente chegam perto do ponto crítico tendem a 'ir embora' e demoram muitos iterados para retornar à zona de pouca expansão. Durante estes iterados o mapa se comporta como se fosse expansor, e isto nos dá um indício de que o mesmo mecanismo que garante a existência de acips para mapas expansores deveria ainda funcionar neste caso. Isto de fato pode se formalizar, como mostraremos mais a frente.

Para  $c \geq -2$ , o ponto crítico não necessariamente fica longe da zona de pouca expansão, porém é razoável pensar que demora muito tempo para voltar perto de si, e o argumento poderia ainda valer para estes parâmetros. Lamentavelmente (ou não) esta ideia simples de que o ponto crítico demora muito para voltar não é verdadeira em geral: é verdadeira para 'muitos' parâmetros (no sentido da medida de Lebesgue), e para estes é que pode se provar a existência da acip. Isto é o que mostraremos nestas notas.

Um chamado de atenção: poderia se pensar que o problema está no método da prova, e talvez para todo  $c \approx -2$  exista uma acip. Isto está bem longe de ser válido.

**Teorema 1.0.2** (Lyubich [2]). *O complementar do conjunto de parâmetros  $c \in [-2, 0]$  tais que  $f_c$  admite uma acip contém um conjunto aberto e denso.*

## Capítulo 2

# Propriedades dinâmicas de $f_c$

### 2.1 Sinopse

- Começaremos lembrando alguns fatos básicos da dinâmica de  $\{f_c\}_{c \in [-2,0]}$ , em particular analisaremos a existência de ciclos atratores (parâmetros hiperbólicos), definição 2.3.2.
- Utilizando o conceito de derivada Schwartziana (Seção 2.3) mostraremos que  $f_c$  poder ter no mais um ciclo atrator (corolário 2.3.1). Neste caso segue-se que a dinâmica de  $f_c$  é simples.
- A seção 2.4 é central para nós. Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é um mergulho ( $C^3$ ) de um intervalo  $I$ , a distorção de  $f$  em  $x \in I$  é

$$d_f(x) := \frac{u'_f(x)}{f'(x)} = \frac{f''(x)}{(f'(x))^2}, \quad u_f(x) = \log |f'(x)|$$

O resultado fundamental desta parte é o corolário 2.4.1: se  $I$  é pre-compacto e  $Sf < 0$ , então para todo  $y \in f(I)$

$$|d_{f^{-1}}(y)| \leq \frac{2}{d(y, \partial f(I))}$$

Como consequência desta distorção limitada local teremos distorção limitada global em  $I$ : existe uma constante  $R > 0$  tal que  $g = f^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$e^{-R(b-a)} \frac{b-a}{d-c} \leq \frac{\lambda(A)}{\lambda(g(A))} \leq e^{R(b-a)} \frac{b-a}{d-c}.$$

para todo  $A \subset [a, b]$  mensurável (ver (2.2)). Para conveniência do leitor isto é demonstrado com detalhe no Apêndice.

- O capítulo culmina com uma breve resenha do que acontece para parâmetros  $c < 2$  (neste caso a dinâmica não errante da  $f$  é hiperbólica, conjugada a um shift de dois símbolos), e para o parâmetro especial  $c = -2$ . Neste último caso mostramos um argumento simples de que ele é estocástico, isto é, tem uma acip.

## 2.2 Dinâmica básica

Para um parâmetro real  $c$ , estudaremos a dinâmica de  $f_c = x^2 + c$ . Nestas notas, o nosso foco será mostrar a existência de parâmetros  $c \in [-2, 0]$  para os quais  $f_c$  admite uma *acip*. Nesta seção iremos estabelecer alguns conceitos básicos para entender a dinâmica da  $f_c$ .

Começamos encontrando os pontos fixos de  $f_c$ ,

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad \alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Perceba que para qualquer parâmetro  $c > 1/4$ ,  $f_c$  não possui nenhum ponto fixo; qualquer  $x \in \mathbb{R}$  é um ponto errante, isto é,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x)| = +\infty$ .

Se  $c = 1/4$ , então  $\alpha = \beta = 1/2$  e  $f'_{1/4}(1/2) = 1$  (o único ponto fixo é parabólico); no entanto perceba que

$$f_{1/4}(x) - f_{1/4}(1/2) = (x - 1/2) + (x - 1/2)^2,$$

portanto, o ponto fixo atrai pela esquerda e repele pela direita.

Para  $c < 1/4$ , calculamos as derivadas dos pontos fixos:

$$f'_c(\beta) = 1 + \sqrt{1 - 4c} > 1,$$

logo  $\beta$  é repulsor para todo  $c < 1/4$ . Para estes parâmetros é claro que a única dinâmica interessante pode acontecer no intervalo  $I_c = [-\beta, \beta]$  (perceba que tanto  $\beta$  como  $-\beta$  são repulsores), sendo que todos os outros pontos são errantes. Note também que  $f_c(I_c) \subset I_c$  só para  $c \geq -2$ . Em resumo, obtemos que

$$I_c = \mathbb{R} \setminus \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x)| = +\infty\}$$

para (e somente para)  $c \in [-2, 1/4]$ .

Para o ponto fixo  $\alpha$ , obtemos:

$$f'_c(\alpha) = 1 - \sqrt{1 - 4c} \Rightarrow \begin{cases} \text{atrator, se } c \in (-3/4, 1/4) \\ \text{neutro, se } c = -3/4 \\ \text{repulsor, se } c < -3/4. \end{cases}$$

No caso quando  $\alpha$  é atrator não é muito difícil verificar diretamente que a órbita de todo ponto  $x \notin \{-\beta, \beta\}$  converge a  $\alpha$ . Por outro lado, será conveniente para o que segue explicar alguns mecanismos mais gerais.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  classe  $C^1$ , e  $x$  ponto fixo atrator de  $f$ . A bacia de atração de  $x$  é*

$$W^s(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(y) = x\}$$

A bacia imediata de atração de  $x$ , denotada  $W^s_{loc}(x)$ , representa a componente conexa de  $W^s(x)$  que contém o ponto fixo  $x$ . Verifica-se facilmente que:

**Proposição 2.2.1.**  *$W^s(x)$  é aberto, e os pontos de fronteira de sua componente conexa ( $\partial W^s_{loc}(x)$ ), se existem, satisfazem  $f(\partial W^s_{loc}(x)) \subset \partial W^s_{loc}(x)$ .*

Voltando à  $f_c$ , para  $c \in (-3/4, 1/4)$ , sabemos que a bacia de atração de  $\alpha$  está contida em  $I_c$ , logo pela proposição anterior sua componente conexa é da forma  $(a, b)$ , com  $f(\{a, b\}) \subset \{a, b\}$ . Necessariamente ou  $a, b$  são pontos fixos, neste caso  $a = -\beta, b = \beta$ , ou  $a$  é um ponto periódico de período 2 e  $b = f(a)$ . Os pontos periódicos de período dois são:

$$r_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4c}}{2}, \quad r_- = \frac{-1 - \sqrt{3 - 4c}}{2}.$$

Portanto, para  $c > -3/4$  em que  $a$  é atrator,  $r_+$  e  $r_-$  não estão definidos nos reais, logo os únicos pontos que podem ser fronteira de  $W_{loc}^s(x)$  são  $\pm\beta$ . Assim, verificamos que a bacia de atração de  $\alpha$  é  $I_c = (-\beta, \beta)$ . Para  $c = -3/4$ , temos  $\alpha = -1/2, \beta = 3/2$  e

$$f_{-3/4}(x) - f_{-3/4}(-1/2) = x^2 - 1/4 = (x + 1/2)(x - 1/2),$$

logo,  $\alpha = 1/2$ , atrai todos os pontos em  $(-3/2, 3/2) = I_{-3/4}$ .

Para  $c < -3/4$ , ambos os pontos fixos são repulsores, como o conjunto limite do  $f_c|_{I_c}$  é não vazio (e já sabemos que não pode conter  $\pm\alpha, \pm\beta$ ), existe uma estrutura invariante que pode carregar uma dinâmica não trivial. A possibilidade mais simples para tal estrutura são órbitas periódicas, que discutiremos a continuação.

### Definição 2.2.2.

- $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$  é um ciclo periódico se

$$f(x_i) = x_{i+1 \bmod n} \quad \forall 0 \leq i \leq n-1.$$

- O multiplicador (ou expoente) do ciclo é  $m = \prod_{i=0}^{n-1} |(f^i)'(x_i)|$ .
- Diremos que o ciclo é

$$\begin{cases} \text{atrator, se } |m| < 1 \in (-3/4, 1/4) \\ \text{neutro, se } |m| = 1 \\ \text{repulsor, se } |m| > 1. \end{cases}$$

Discutiremos a continuação uma ferramenta que nos permitirá entender alguns aspectos da dinâmica em presença de ciclos periódicos.

## 2.3 Derivada Schwartziana

**Definição 2.3.1.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mergulho de classe  $C^3$ , onde  $I$  é um intervalo aberto ou fechado. A derivada Schwartziana de  $f$  no ponto  $x$  é

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

**Proposição 2.3.1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $Sf(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ , então

$$|f'(x)| > \min \{|f'(a)|, |f'(b)|\}, \quad \forall x \in (a, b)$$

*Demonstração.* Suponha que existe  $y_0 \in (a, b)$  onde  $f'$  tem um mínimo, então  $f''(y_0) = 0$  e

$$Sf(y_0) = \frac{f'''(y_0)}{f'(y_0)} < 0,$$

portanto,  $f'(y_0)$  e  $f'''(y_0)$  têm sinais trocados, o que implica que de qualquer forma,  $y_0$  é máximo local de  $|f'|$ . Como  $|f'|$  é contínua em um compacto, ela necessariamente tem um mínimo, com isso, ele tem de ser em  $a$  ou  $b$ . ■

**Proposição 2.3.2.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e suponha que  $p$  ponto fixo atrator de  $f$  tal que  $W_{loc}^s(p)$  é um intervalo limitado. Então existe  $x_0 \in W_{loc}^s(p)$  que satisfaz uma das seguintes possibilidades*

1.  $f'(x_0) = 0$ .
2.  $Sf(x_0) \geq 0$ .

*Demonstração.* Escrevemos  $W_{loc}^s(p) = (a, b)$ ; pela Prop. 2.1,  $f(\{a, b\}) \subset \{a, b\}$ . Temos as seguintes possibilidades:

- $f(a) = f(b)$ ; então a existência do ponto crítico em  $(a, b)$  está garantida pelo Teorema de Rolle.
- $a, b$  pontos fixos de  $f$ ; como são fronteiras da bacia de atração de  $p$ , eles não podem ser atratores, logo  $\min\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \geq 1$ . Assim, pela Prop 2.3.2, se  $Sf(x)$  está definida e é negativa  $\forall x \in (a, b)$ , então  $|f'(x)| > 1$ , o que contradiz o fato de  $p$  ser ponto fixo atrator ( $|f'(p)| < 1$ ). Necessariamente então, ou existe um ponto crítico dentro de  $(a, b)$  ou a derivada Schwartziana é não-negativa em algum ponto deste intervalo.
- Se  $f(a) = b$  e  $f(b) = a$ , então  $f^2(a) = a$  e  $f^2(b) = b$ , note que  $p$  é ponto fixo atrator de  $f^2$ , e  $Sf^2 = (Sf \circ f) \cdot (f')^2$  também é negativa onde está definida. Voltamos ao caso anterior, então existe  $x_0 \in (a, b)$  com  $(f^2)'(x_0) = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0$ , o que conclui a prova. ■

Note que para  $f_c = x^2 + c$ ,  $Sf(x) = -\frac{3}{2x^2} < 0$  e pela relação  $Sf^2 = (Sf \circ f) \cdot (f')^2$ , podemos ver indutivamente que  $Sf^n < 0 \forall n$ . Como 0 é o único ponto crítico de  $f_c$  (resp,  $f_c^n$ ) concluímos que:

**Corolário 2.3.1.** *Podem existir no máximo um ciclo atrator para  $f_c|_{I_c}$ .*

Veja que o ciclo  $\{r_-, r_+\}$  de período 2 é atrator se  $c \in (-5/4, -3/4)$ . De fato, em  $c = -5/4$  ocorre uma bifurcação de duplicação de período, isto é, à direita, de  $-5/4$ , a função tem um ciclo periódico atrator de período  $2^1$ , e à esquerda, possui um ciclo periódico repulsor de período  $2^2$ . Este mesmo comportamento (duplicação de período) ocorre em uma sequência decrescente de parâmetros  $(c_n)$ , que sendo limitada por baixo (por  $-2$ ), converge a um parâmetro  $c_\infty \approx -1.401\dots$  denominado *ponto de Feigenbaum*.

**Definição 2.3.2.** *Dizemos que  $f_c$  é hiperbólico se  $f_c$  possui um ciclo periódico atrator. Denotamos  $c \in H$  se  $f_c$  é hiperbólico.*

**Observação 2.3.1.** Se  $c \in H$ , então  $f_c$  não admite uma acip. Suponha que  $\mu_c$  é uma acip para  $f_c$  e suponha por absurdo que  $f_c$  tem um ciclo periódico atrator. Então algum iterado  $g_c$  de  $f_c$  tem um ponto fixo atrator  $q$ ;  $E = W_g^s(q)$  é aberto e portanto  $\mu_c(E) > 0$  (pois  $\text{Leb}(E) > 0$ ). Mas, o único ponto não-errante no  $E$  é  $q$ , o que contradiz o teorema de recorrência de Poincaré.

É imediato que  $H$  é aberto em  $[-2, 1/4]$ ; que é também denso é um fato muito mais sofisticado.

**Teorema 2.3.1** (Lyubich - Annals of Mathematics).  $H$  é aberto e denso em  $[-2, 1/4]$ .

O mapa  $f_{c_\infty}$  correspondente ao parâmetro de Feigenbaum não é nem hiperbólico nem admite uma acip.

## 2.4 Distorção

Começamos com o seguinte Lema.

**Lema 2.4.1.** Sejam  $f, M : I \rightarrow \mathbb{R}$  mergulhos crescentes classe  $C^3$  tais que  $Sf < 0$ ,  $SM = 0$  em  $I$ . Suponha que  $p \in I$  é tal que  $f(p) = M(p)$ ,  $f'(p) = M'(p)$ ,  $f''(p) = M''(p)$ . Então

$$\begin{aligned} f(x) &< M(x) & \text{se } x > p \\ f(x) &> M(x) & \text{se } x < p \end{aligned}$$

Se  $f, g$  decrescentes, as desigualdades se invertem.

*Demonstração.* Seja  $T$  Möbius tal que  $T(p) = p$ ,  $T'(p) = 1$ ,  $T''(p) = -\frac{f''(p)}{f'(p)} = -\frac{M''(p)}{M'(p)}$ . Perceba que  $T$  é crescente, e se definimos  $f_1 = f \circ T$ ,  $M_1 = g \circ T$ , então  $f_1, M_1$  satisfazem as mesmas hipóteses que  $f, M$ . Além disso,  $f_1''(p) = 0 = M_1''(p)$  o que implica

1.  $M_1$  linear (pois  $M_1$  é uma Möbius tal que sua segunda derivada se anula em um ponto), e portanto  $M_1(x) = 0$  é a equação da reta tangente ao gráfico de  $f_1$  em  $p$ .
2.  $\alpha = f_1'''(p) < 0$ , pois  $Sf_1 < 0$ .

Assim, para  $x \approx p$ ,

$$f_1(x) - M_1(x) = \frac{\alpha}{3!}(x - p)^3 + o((x - p)^3),$$

o que nos permite deduzir localmente, o portanto globalmente (pela monotonia de  $f_1, M_1$ ), que

$$\begin{aligned} f_1(x) &< M_1(x) & \text{se } x > p \\ f_1(x) &> M_1(x) & \text{se } x < p \end{aligned}$$

Usando que  $T$  é monótona crescente, obtemos o resultado. Similar para o caso quando  $f, M$  são decrescentes. ■

Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é um mergulho, a distorção de  $f$  em  $x \in I$  é

$$d_f(x) := \frac{u'_f(x)}{f'(x)} = \frac{f''(x)}{(f'(x))^2}$$

onde

$$u_f(x) = \log |f'(x)|$$

(ver Apêndice).

**Proposição 2.4.1.** *Seja  $I$  intervalo pré-compacto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mergulho classe  $C^3$  com  $Sf < 0$ . Então para todo  $x \in I$ ,*

$$|d_f(x)| \leq \frac{2}{d(f(x), \partial f(I))}$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade podemos assumir que  $f$  é crescente pois  $d_f = d_{-f}$ . Para  $p \in I$  consideramos  $M : I \rightarrow \mathbb{R}$  Möbius tal que  $M(p) = f(p)$ ,  $M'(p) = f'(p)$ ,  $M''(p) = f''(p)$ . Perceba que  $d_M(p) = d_f(p)$ , e pelo lema anterior  $f(x) > M(x)$  se  $x > p$ ,  $g(x) < M(x)$  se  $x < p$ .

Suponha que  $M(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ; por cálculo direto  $d_M(x) = 2 \frac{-c(cx+d)}{ad-bc}$ , e sem perda de generalidade podemos assumir que  $c \neq 0$ . Por outro lado, note que

$$M(x) - M(\infty) = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c} = \frac{ad-bc}{-c(cx+d)} = \frac{2}{d_M(x)}.$$

Neste caso, a distância da  $M$  a sua assíntota horizontal  $M(\infty)$  é pelo menos  $d(g(p), \partial g(D))$ , o que conclui a prova. ■

Suponha que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mergulho classe  $C^3$  com  $Sf < 0$  como na Proposição anterior, e considere  $g : f(I) \rightarrow I$  sua inversa. Note que  $u_g(x) = -u_f(g(x))$ , e portanto  $|d_g(x)| = |d_f(g(x))|$ .

**Corolário 2.4.1.** *Para  $f : I \rightarrow K = f(I)$  nas hipóteses da Proposição anterior, seja  $g : K \rightarrow I$  sua inversa. Então,*

$$|d_g(x)| \leq \frac{2}{d(x, \partial K)}$$

Concluimos esta parte com a seguinte consideração. Seja  $g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mergulho, com

$$|d_g(x)| \leq R_0 \quad \forall x \in I.$$

Temos que, para todo  $x, y \in I$ ,

$$|u_g(x) - u_g(y)| \leq R \cdot |b - a| \Rightarrow \frac{g'(x)}{g'(y)} \leq e^{R(b-a)}. \quad (2.1)$$

Utilizando o teorema de mudança de variáveis concluímos que para todo  $A \subset I$  mensurável,

$$e^{-R(b-a)} \frac{\lambda(I)}{\lambda(g(I))} \leq \frac{\lambda(A)}{\lambda(g(A))} \leq e^{R(b-a)} \frac{\lambda(I)}{\lambda(g(I))}. \quad (2.2)$$

Ver o apêndice para a dedução destas propriedades.

## 2.5 Parâmetros $c < -2$

Perceba agora, que para os parâmetros  $c < -2$ ,  $f(0) = c < -\beta$ , basta analisar a função  $g(c) = c + \beta(c)$  com raiz em  $c = -2$ . Assim que o ponto crítico 0 é um ponto errante para as funções com estes parâmetros. Temos então que nem todos os pontos do intervalo  $I_c$  têm sua órbita limitada.

Para entender a dinâmica das funções com estes parâmetros, então, estudaremos o conjunto

$$\{x \in I_c \mid f_c^n(x) \in I_c, \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_c^{-n}(I_c) := \Lambda_c,$$

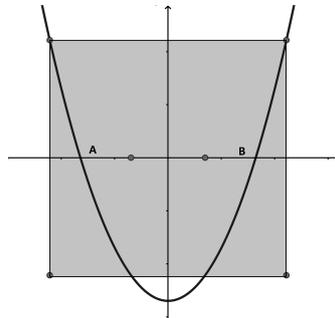
note que se  $x \notin \Lambda_c$ , então  $x$  é um ponto errante. Além disso, como exemplificado na figura mais abaixo, existem dois intervalos fechados  $A, B \subset \bar{I}_c$ , tais que

- $A \cap B = \emptyset$
- $f_c(A) = f_c(B) = \bar{I}_c$
- $x \notin A \cup B \Rightarrow f_c(x) \notin \bar{I}_c$

Assim que

$$\Lambda_c = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_c^{-n}(A \cup B),$$

e portanto  $\Lambda_c$  é um conjunto de Cantor, invariante sob  $f_c$  e maximal com essas propriedades,  $\Lambda_c$  é denotado o maximal invariante de  $f_c$ .



$$c = -2.7$$

**Proposição 2.5.1.** Se  $c < -2$ ,  $f_c|_{\Lambda_c}$  é conjugada ao shift de dois símbolos  $\Sigma_2$ .

Nestas notas, estudaremos que no intervalo  $[-2, c_\infty)$  existe um conjunto de parâmetros, denominados parâmetros estocásticos, que admitem uma *acip*, e que, apesar do Teorema de Lyubich (2.1), podemos dizer que os parâmetros estocásticos são "quase todos os parâmetros" quando estamos muito perto de  $c = -2$ .

## 2.6 O parâmetro especial $c = -2$

Para estudar este caso e também entender melhor alguns conceitos dos anteriores lembremos o seguinte.

**Definição 2.6.1.** *Sejam  $f : M \rightarrow M, g : N \rightarrow N$  funções contínuas,  $M, N$  espaços métricos. Dizemos que  $f$  é topologicamente conjugada a  $g$ , ou apenas conjugada, se existe um homeomorfismo  $h : M \rightarrow N$  tal que  $hf h^{-1} = g$ .*

Perceba que se duas funções são conjugadas, elas possuem a mesma dinâmica, divergindo apenas por esta mudança de coordenadas  $h$ . Não é difícil verificar as seguintes relações:

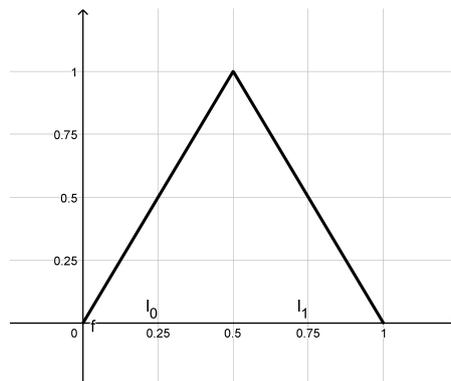
- $x \in \text{Per}_m(f) \iff h(x) \in \text{Per}_m(g)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(h(y)) = h(x)$ . É dizer,  $y$  tende a  $x$  por iterações de  $f$  se e  $h(y)$  tende a  $h(x)$  por iterações de  $g$ .
- $x$  é atrator (idem. repulsor) de  $f \iff h(x)$  é atrator (repulsor) de  $g$
- $cl(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(x)) = M \iff cl(\bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(h(x))) = N$

Veremos que para o caso  $f_c = x^2 + c$  com  $c = -2$ ,  $f_{-2}|_{L_2}$  é conjugada a uma função cuja dinâmica é bem compreendida. Para isso, considere a função  $h : [0, 1] \rightarrow [-2, 2]$  dada por  $h(x) = 2 \cos(\pi x)$ , pode-se verificar que  $h$  é invertível, contínua e diferenciável em  $(0, 1)$ . Verifica-se assim a relação:

$$f_{-2}(h(x)) = 2(2 \cos^2(\pi x) - 1) = 2 \cos(2\pi x) = 2 \cos \pi g(x) = h(g(x)),$$

em que  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é dada por  $g(x) = 1 - |1 - 2x|$ .

Assim, mostramos que  $f_{-2}|_{L_2}$  é conjugada ao mapa  $g(x) = 1 - |1 - 2x|$ , cujo gráfico é mostrado a seguir:



Note que a função  $g$  preserva a medida de Lebesgue pois dado um intervalo  $I \subset [0, 1]$  com  $\text{Leb}(I) = C_I$ ,  $f^{-1}(I) = A \cup B$ , em que  $A, B$  são dois intervalos com interiores disjuntos  $A \subset I_0 = [0, 1/2]$ ,  $B \subset I_1 = [1/2, 1]$  tais que  $\text{Leb}(A) = \text{Leb}(B) = \frac{C_I}{2}$ . Assim que  $\text{Leb}(g^{-1}(I)) =$

$\text{Leb}(A) + \text{Leb}(B) = \text{Leb}(I)$ .

Portanto, definindo a medida  $\mu_{-2}$  induzida por  $h(x) = 2 \cos(\pi x)$ , será uma *acip* para  $f_{-2} = x^2 - 2$ .

Ou seja,

$$\mu_{-2}(\varphi) = \text{Leb}(\varphi \circ h), \quad \varphi \in C([-2, 2]).$$

Assim que, dado um conjunto  $E \subset I_{-2}$  medível:

$$\mu_{-2}(f_{-2}(E)) = \text{Leb}(\mathbb{X}_E \cdot (f_{-2} \circ h)) = \text{Leb}(\mathbb{X}_E \cdot g) = \text{Leb}(\mathbb{X}_E) = \text{Leb}(E).$$

Mostramos, então, que  $\mu_{-2}$  é  $f_{-2}$ -invariante.

## Capítulo 3

# Parâmetros Regulares e Mapas Bernoulli

### 3.1 Sinopse

Fixamos  $f_c$ ,  $c \in [-2, 0]$  e denotamos  $\alpha < \beta$  seus pontos fixos. Definimos

- $I = [-\beta, \beta]$ .
- $A = [\alpha, -\alpha]$ .
- $\hat{A} = (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$ , onde  $f(\alpha^{(1)}) = f(-\alpha^{(1)}) = -\alpha$ .

Ver figura 3.1.

**Definição.** Um intervalo compacto  $J \subset I$  é regular de ordem  $n$  se existe  $\hat{J} \supset J$  intervalo aberto tal que  $f^n|_{\hat{J}} : \hat{J} \rightarrow \hat{A}$  é um mergulho com  $f^n(J) = A$ ; denotamos  $g_J : \hat{A} \rightarrow \hat{J}$  o ramo inverso.

O conjunto  $W_n = \bigcup_{m=0}^n \{J : J \text{ é } m\text{-regular}\}$  é o conjunto de pontos  $n$ -regulares, e  $\bigcup_n W_n$  são todos os pontos regulares.

Neste capítulo estudaremos a dinâmica dos  $f_c$  associados a parâmetros regulares (definição 3.2.2), é dizer, para os quais  $\text{Leb}(A \cap W_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Leb}(A)$  convergem de forma exponencial. Temos em particular que  $W = \bigcup_n W_n$  tem medida total dentro de  $A$ , mas não somente isso: o fato de que a convergência seja exponencial permite passar informação do mapa de retorno induzido em  $W$  para a  $f$ . Ver abaixo.

- Observaremos primeiro que quando  $c$  é regular podemos escrever  $W$  como união de intervalos abertos, módulo um conjunto de medida 0. Cada um destes intervalos é enviado de forma bijetora por um iterado da  $f$  em  $\hat{A}$ .
- Fixamos um tal intervalo  $\hat{J} \subset W$  e denotamos  $g = \hat{A} \rightarrow \hat{J}$  a inversa da  $f^N : \hat{J} \rightarrow \hat{A}$ . Como a derivada Schartziana de qualquer iterado da  $f$  é negativa (em intervalos que não contém o ponto crítico), podemos utilizar o corolário 2.4.1 do capítulo anterior e mostrar

que  $g$  tem distorção limitada por  $\approx \frac{1}{|\hat{A} \setminus A|}$  em  $J = g^{-1}(A)$ . Observe que em particular a distorção é limitada, independentemente da ordem do iterado, pois  $|\hat{A} \setminus A|$  fica afastado de 0 para  $c \in [-2, 0]$ .

Isto nos permite deduzir em particular estimativas uniformes para as derivadas da inversa da  $g$ , corolário 3.2.1, em intervalos regulares dentro de  $A$ .

- Utilizaremos estas estimativas para poder empregar a maquinária do Formalismo Termodinâmico, em particular o operador de Perron-Frobenius, seção 3.3. Este é o operador  $\mathcal{L} : C(A) \rightarrow C(A)$ , definido por

$$\mathcal{L}h = \sum_{J \subset W} h \circ g_J |g_J'| \quad h : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua,}$$

onde  $g_J = (f^{N_J})^{-1} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{J}$  envia  $A$  em  $J$ . A propriedade principal deste operador é que se  $\mathcal{L}h = h$ , então  $\mu = hdx$  é uma acip para o mapa  $T : W \rightarrow A$ ,

$$T(x) = f^{N_J}(x) \quad x \in J \text{ (i.e., o primeiro retorno de } x \text{ a } A).$$

- Para mostrar a existência de um ponto fixo para o operador de Perron-Frobenius utilizaremos que deixa invariante o conjunto de funções analíticas sobre  $A$ , junto com as estimativas uniformes de distorção. Com isto poderemos mostrar “limitações a priori” para a família de iterados  $\{\mathcal{L}^m h\}_m$ , e portanto pré-compacidade desta família. Assim, passando por médias de César, conseguiremos mostrar a existência de pelo menos um ponto fixo de  $\mathcal{L}$ .
- A seguir, utilizaremos um argumento conhecido de teoria ergódica: se  $x$  é ponto de densidade de  $E$  para a medida  $\mu$ , sua (pré) imagem é de “quase” densidade para  $T^{-1}E$ . Isto se deve novamente ao fato das estimativas de distorção serem uniformes. Então, se  $E$  for invariante de medida positiva, poderemos mostrar que tem medida total em  $A$ , e  $\mu$  é ergódica para  $T$ .
- Note que até agora temos a medida invariante para o primeiro retorno, e não para a função  $f|_A$ . Novamente isto é um problema que tem uma solução canônica: se mostramos (e faremos na seção 3.4) que a função tempo de retorno de  $x$  a  $A$  é integrável, então podemos construir uma medida invariante para a  $f$ . A demonstração desta última parte é feita na seção 3.5, e aqui utilizamos que a medida dos pontos que não são  $n$ -regulares converge exponencialmente rápido a zero quando  $n \mapsto \infty$ .
- Também, em 3.4 mostraremos que a medida invariante para  $T$  (resp.  $f$ ) tem um expoente de Lyapunov positivo.

## 3.2 Parâmetros e pontos regulares

Consideramos  $f = f_c$  para  $c \in [-2, 0]$ . Sejam  $\alpha = \alpha(c) < \beta(c) = \beta$  os pontos fixos de  $f$  e denotamos

- $I = [-\beta, \beta]$ .
- $A = [\alpha, -\alpha]$ .
- $\hat{A} = (\alpha^{(1)}, -\alpha^{(1)})$ , onde  $f(\alpha^{(1)}) = f(-\alpha^{(1)}) = -\alpha$ .

Temos  $A \subset \hat{A}$  e  $f([\alpha^{(1)}, \alpha]) = f([-\alpha, -\alpha^{(1)}]) = A$ . Ver figura 3.1.

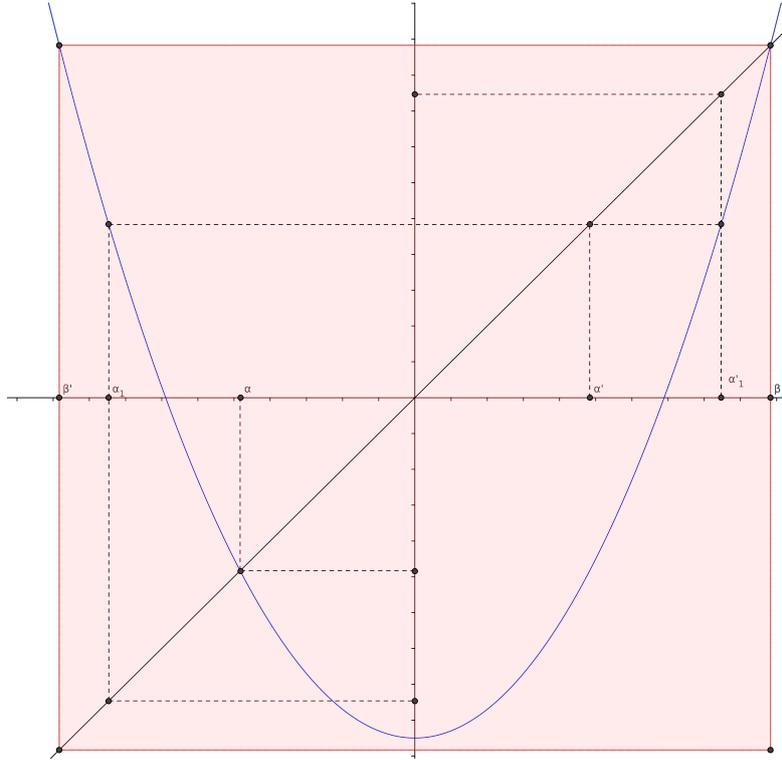


Figura 3.1

**Definição 3.2.1.** Um intervalo compacto  $J \subset I$  é regular de ordem  $n$  se existe  $\hat{J} \supset J$  intervalo aberto tal que  $f^n|_{\hat{J}} : \hat{J} \rightarrow \hat{A}$  é um mergulho com  $f^n(J) = A$ .

O conjunto  $W_n = \bigcup_{m=0}^n \{J : J \text{ é } m\text{-regular}\}$  é o conjunto de pontos  $n$ -regulares, e  $\cup_n W_n$  são todos os pontos regulares.

Se  $J$  é regular note que sua ordem e o intervalo  $\hat{J}$  estão unicamente determinados (pois  $f|_A$  não é um difeomorfismo): denotamos  $n = \text{ord}(J)$ , e  $g_J : \hat{A} \rightarrow \hat{J}$  o ramo inverso de  $f^{\text{ord}(J)}|_{\hat{J}}$ .

**Definição 3.2.2.** Um parâmetro  $c \in [-2, -\frac{3}{4})$  é dito regular se existem  $C, \theta > 0$  tais que

$$\text{Leb}(\{x \in A : x \text{ não é } n\text{-regular}\}) \leq C e^{-\theta n}$$

Consideremos agora  $c$  parâmetro regular, e denotemos

$$\mathcal{J} = \{J \subset A : \exists n \geq 1 \text{ tal que } J \text{ intervalo regular de ordem } n \text{ de tamanho maximal}\}.$$

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $J, J'$  intervalos regulares. Necessariamente,  $J \subset J', J' \subset J$  ou  $\text{int}(J) \cap J' = \emptyset$ . Em particular, se  $J, J' \in \mathcal{J}$  então seus interiores são disjuntos.*

*Demonstração.* Consideremos  $\Delta_n = f_c^{-n}(\{-\alpha, \alpha\}) = f_c^{-n}(\partial A)$ ; em particular temos  $\Delta_0 = \{\pm\alpha\}$ ,  $\Delta_1 = \{\pm\alpha, \pm\alpha^{(1)}\}$ . Denotemos  $n = \text{ord} J, J = [a, b], \hat{J} = (\hat{a}, \hat{b})$ . Como  $f_c^n J = A, f_c^n(\{a, b\}) \in \Delta_0 \Rightarrow a, b \in \Delta_n$ , e utilizando que  $f_c \Delta_1 = \Delta_0, \hat{a}, \hat{b} \in \Delta_1$ . Observemos o seguinte.

- $a < b$  são pontos consecutivos em  $\Delta_n$ , pois não tem pontos em  $(a, b)$  que sejam enviados a  $\pm\alpha$ .
- $\hat{a} < \hat{b}$  são pontos consecutivos de  $\Delta_{n+1}$ , por um argumento similar.
- Suponhamos  $J \subset A, \alpha \leq a < b \leq -\alpha$ . Como  $\hat{a} < \hat{b}$  são consecutivos em  $\Delta_{n+1}$  e  $\pm\alpha^{(1)} \in \Delta_{n+1}$ , necessariamente  $\alpha^{(1)} \leq \hat{a} < \hat{b} \leq -\alpha^{(1)}$ , e portanto  $\hat{J} \subset \hat{A}$ .
- Da mesma forma, se  $\text{int}(J) \subset A, \alpha < a < b < -\alpha$  e  $\hat{a} < \hat{b}$  são consecutivos em  $\Delta_{n+1}$ , diferentes de  $\pm\alpha^{(1)}$ ; portanto,  $\alpha \leq \hat{a} < \hat{b} \leq -\alpha$  e  $\hat{J} \subset \hat{A}$ .

Voltando na prova, suponhamos que  $\text{ord} J' = n' \geq n$ . Então  $f^n(J')$  é um intervalo regular de ordem  $n' - n$ , o que implica que está contido dentro de  $A$ , ou é disjunto com o interior do  $A$ . No primeiro caso necessariamente  $J' \subset J$ , e no segundo  $J \cap J' = \emptyset$ . ■

Seja  $W := \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \text{int} J$ ; claramente

$$A \setminus W = \{x \in A : x \text{ não é } n\text{-regular } \forall n \geq 1\}$$

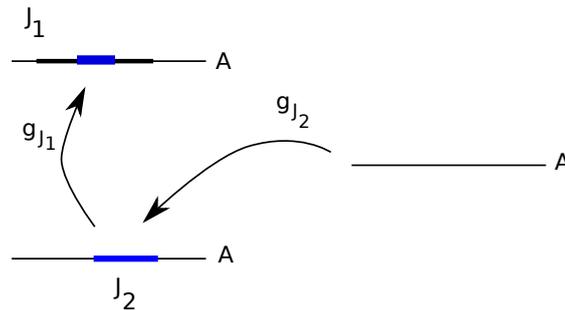
e como  $c$  é regular,  $\text{Leb}(A \setminus W) \leq C e^{-n\theta}$  para todo  $n \geq 1$ , o que implica  $\text{Leb}(A \setminus W) = 0$ . Definimos as funções  $N : W \rightarrow \mathbb{N}, T : W \rightarrow A$  onde se  $x \in \text{int}(J) \subset W$ ,

$$N(x) = \text{ord}(J) \tag{3.1}$$

$$T(x) = f^{N(x)}(x). \tag{3.2}$$

Note que  $T^{-1} = g_J$ .

A família  $\mathcal{J}$  tem a seguinte *propriedade de Markov*: suponha que  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ .



O intervalo  $J := g_{J_1} \circ g_{J_2}(A)$  é  $\text{ord}(J_1) + \text{ord}(J_2)$  regular, mas não maximal (i.e.  $J \notin \mathcal{J}$ ). Pelo mesmo argumento, dados  $J_1, \dots, J_m \in \mathcal{J}$ , a  $m$ -upla  $(J_1, \dots, J_m)$  define um intervalo regular  $J =$

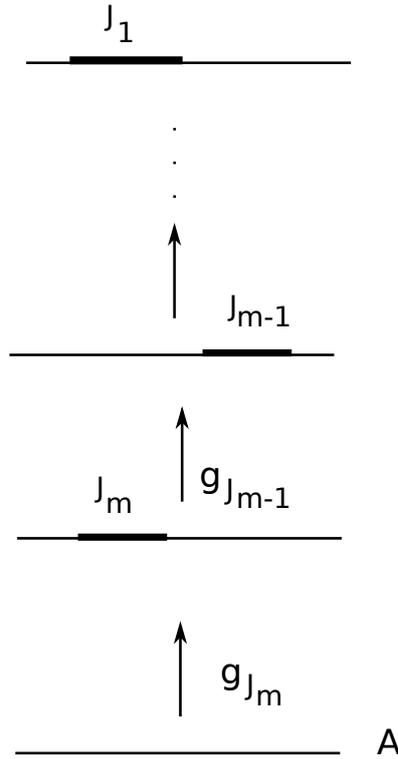


Figura 3.2: Primeiro retorno associado a um intervalo regular  $\underline{J} = (J_1, \dots, J_m)$

$g_{J_1} \circ \dots \circ g_{J_m}(A) \subset J_1$ . Reciprocamente, dado  $J \subset A$  regular, existe  $J_1$  maximal tal que  $J \subset J_1$ , e podemos construir diretamente  $(J_1, \dots, J_m) \in \mathcal{J}^m$  tal que  $J = g_{J_1} \circ \dots \circ g_{J_m}(A)$ . Por isto, podemos identificar a família de todos os intervalos regulares contidos em  $A$  com a união disjunta

$$\mathcal{J}^{(\infty)} := \bigsqcup_{m \geq 0} \mathcal{J}^{(m)} \quad \mathcal{J}^{(m)} = \begin{cases} \{A\} & m = 0 \\ \mathcal{J}^m & m \geq 1 \end{cases}.$$

Identificamos  $\underline{J} = (J_1, \dots, J_m)$  com  $J = g_{J_1} \circ \dots \circ g_{J_m}(A) \subset J_1$ ; a ordem de  $\underline{J}$  é  $\sum_{i=1}^m \text{ord}(J_i)$  (assumindo  $m \geq 1$ ).

Consideremos agora  $\underline{J} = (J_1, \dots, J_m)$  intervalo regular, e  $\underline{J}' = (J_1, \dots, J_{m-1})$  (ver figura 3.2 abaixo).

Temos  $\underline{J} \subset \underline{J}'$ . Seja  $g = g_{\underline{J}'} : \hat{A} \rightarrow \hat{\underline{J}'}$ .

**Lema 3.2.2.** *Seja  $C_0 = \frac{2}{\alpha - \alpha^{(1)}}$ . Então*

$$|d_g(x)| \leq C_0 \quad \forall x \in A.$$

*Demonstração.* Como  $Sf^n < 0$  para todo  $n$ , pelo Corolário 2.4.1) temos, para todo  $x \in A$

$$|d_g(x)| \leq \frac{2}{d(x, \partial \hat{A})} \leq C_0.$$

■

Usando isto com (2.2) deduzimos:

**Corolário 3.2.1.** Temos  $\forall x \in \underline{J}$ ,

1.  $1 - \frac{\lambda(\underline{J})}{\lambda(\underline{J})} \geq e^{-C_0\lambda(A)} \left( 1 - \frac{\lambda(\underline{J}_m)}{\lambda(A)} \right)$ ;
2.  $\lambda(\underline{J}) \leq (1 - c_1)^m \lambda(A)$ ;
3.  $(T^m)'(x) \geq e^{-C_0\lambda(A)} (1 - c_1)^{-m}$ ;

onde  $c_1 = e^{-C_0\lambda(A)} \left( 1 - \frac{\max_J \lambda(\underline{J})}{\lambda(A)} \right)$ .

*Demonstração.* Aplicando diretamente (2.2) com  $E = A \setminus J_m$ , e usando  $g(E) = \underline{J}' \setminus \underline{J}$ ,  $g(\underline{J}') = A$ , obtemos

$$\frac{\lambda(\underline{J}' \setminus \underline{J})}{\lambda(\underline{J}')} \geq e^{-C_0\lambda(A)} \cdot \frac{\lambda(A \setminus J_m)}{\lambda(A)}.$$

Como  $\lambda(W \setminus Z) = \lambda(W) - \lambda(Z)$ ,

$$1 - \frac{\lambda(\underline{J})}{\lambda(\underline{J}')} \geq e^{-C_0\lambda(A)} \left( 1 - \frac{\lambda(\underline{J}_m)}{\lambda(A)} \right),$$

o que mostra a primeira parte.

Consideramos  $c_1$ : por anterior  $1 - \frac{\lambda(\underline{J})}{\lambda(\underline{J}')} \geq c_1$ , o

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{J}) &\leq (1 - c_1)\lambda(\underline{J}') \leq (1 - c_1)^2\lambda(\underline{J}'') \\ &\vdots \\ &\leq (1 - c_1)^m\lambda(\underline{J}^{(m)}) = (1 - c_1)^m\lambda(A) \end{aligned}$$

onde denotamos  $\underline{J}^{(k)} = (J_1, \dots, J_{m-k})$ . Concluimos a segunda parte.

Para a última, sabemos que o mapa  $T^m : \underline{J} \rightarrow A$  é diferenciável, assim que para algum  $y_0 \in \text{int}(\underline{J})$  e para todo  $x \in \underline{J}$  temos

$$|(T^m)'(x)| = \frac{|(T^m)'(x)| \lambda(A)}{|(T^m)'(y_0)| \lambda(\underline{J})} = \frac{|g'_{\underline{J}}(T^m y_0)| \lambda(A)}{|g'_{\underline{J}}(T^m x)| \lambda(\underline{J})} \geq e^{-C_0\lambda(A)} \frac{1}{(1 - c_1)^m}$$

onde na ultima desigualdade utilizamos as partes anteriores. A prova do Corolário está completa. ■

Da mesma forma, obtemos para  $g = g_{\underline{J}} : A \rightarrow \underline{J}$  o seguinte:

**Lema 3.2.3.** Para todo  $E \subset A$  mensurável, temos

$$\exp(-C_0|A|) \frac{|E|}{|A|} \leq \frac{|g(E)|}{|\underline{J}|} \leq \exp(C_0|A|) \frac{|E|}{|A|}.$$

### 3.3 O operador de Perron-Frobenius

Lembrar que uma medida  $\mu$  é absolutamente contínua (respeito á Lebesgue  $:= \lambda = dx$ ) se  $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ . Utilizaremos a seguinte versão particular do Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $\mu$  uma probabilidade em  $[0, 1]$ . Então  $\mu$  é uma acip se e somente se existe  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $d\mu = hdx$ . Se  $h > 0$  para Lebesgue q.t.p., então  $\mu$  é equivalente a Lebesgue.*

Fixemos então  $\mu$  medida absolutamente contínua em  $A$ ,  $d\mu = hdx$  com  $h \geq 0$ ,  $\int h(x)dx < \infty$ . Como  $T$  é diferenciável, se  $\lambda(A) = 0$  implica  $\lambda(T^{-1}A) = 0$ ; com isto vemos que  $T_*\mu$  também é absolutamente contínua, e portanto  $dT_*\mu = \mathcal{L}hdx$  para certa  $\mathcal{L}h$  não-negativa de integral finita. Para determinar  $\mathcal{L}h$  utilizaremos o teorema de mudanças de variáveis: se  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, então

$$\int \phi dT_*\mu = \int \phi \circ T d\mu = \int \phi \circ Th dx = \int \phi \mathcal{L}h dx$$

mas, por outro lado

$$\int \phi \circ Th dx = \int_W \phi \circ Th dx = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J \phi \circ Th \cdot dx = \sum_{J \in \mathcal{J}} \int_J \phi \cdot h \circ g_J \cdot |g'_J| dx.$$

Deduzimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h &= \sum_{J \in \mathcal{J}} h \circ g_J |g'_J| \\ \Rightarrow \mathcal{L}^m h &= \sum_{J \in \mathcal{J}^m} h \circ g_J |g'_J| \quad \forall m \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Definição 3.3.1.** *O operador de Perron-Frobenius associado a  $T$  é  $\mathcal{L} : C(A) \rightarrow C(A)$  dado pela fórmula anterior.*

**Notar:**  $d\mu = hdx$  com  $h \in C(A)$  é  $T$ -invariante se e somente se  $\mathcal{L}h = h$ .

Procuramos, portanto, pontos fixos do operador  $\mathcal{L}$ . Existe uma teoria geral para atacar este tipo de problemas, porém em nosso caso vamos utilizar apenas alguns fatos clássicos da análise complexa, aproveitando fortemente a regularidade do  $T$ . A ideia é aplicar este operador num espaço mais regular do que o  $C(A)$ .

Seja  $U := (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup \hat{A}$ :  $U$  é simplesmente conexo e como  $f^n$  não tem valores críticos em  $U$ , se  $J$  intervalo regular a função  $g_J$  estende a uma função holomorfa em  $U$  sem singularidades, e portanto de forma injetora (univalente). Denotamos a extensão com a mesma letra e observamos que

- $g_J(\hat{A}) = \hat{J}$
- $g_J(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Escrevemos  $\epsilon_J = sg(g'_J|_{\hat{A}})$  e  $\tilde{g}_J := \epsilon_J \frac{|A|}{|J|} (g_J - g_J(0))$ : então  $\tilde{g}_J(0) = 0$  e pela propriedade de distorção limitada da  $g_J$  (2.1), a derivada em  $\tilde{g}'_J(0)$  é uniformemente limitada, independente de  $J$ .

**Famílias normais** Seja  $U \subset \mathbb{C}$  aberto. Lembremos que  $\mathcal{F} \subset Hol(U)$  é uma *família normal* se toda sequência  $(h_n)_n \subset \mathcal{F}$  tem uma subsequência convergente em subconjuntos compactos do  $U$ : é dizer, existe  $(\phi(n))_n \subset \mathbb{N}$  e  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$K \subset U \text{ compacto} \implies \sup_{z \in K} |h(z) - h_{\phi(n)}(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como consequência do teorema de Morera  $h \in Hol(U)$ , mas não requeremos que  $h \in \mathcal{F}^1$ .

**Teorema 3.3.2 (Montel).** *Se  $\mathcal{F} \subset Hol(U)$  é limitada em subconjuntos compactos do  $U$ , então é normal.*

Precisamos também do seguinte:

**Teorema 3.3.3 (Princípio da distorção de Koebe).** *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  univalente com  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ . Então*

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}$$

Voltando no caso  $\{\tilde{g}_J : U \rightarrow \mathbb{C}\}_{J \in \mathcal{J}}$ , pelo teorema de uniformização do Riemann existe uma função bi-holomorfa  $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow U, \Psi(0) = 0$ ; então  $\mathcal{F} := \{\tilde{g}_J \circ \Psi\}_{J \in \mathcal{J}}$  é uma família de funções univalentes do disco, que se anulam no origem. Pelo Teorema de Koebe  $\mathcal{F}$  é limitada em compactos, e como consequência, é uma família normal. Concluimos que  $\{\tilde{g}_J : U \rightarrow \mathbb{C}\}_{J \in \mathcal{J}}$  é normal.

Temos  $g'_J \cdot \epsilon_J = \frac{|J|}{|A|} \cdot \tilde{g}'_J$ ; se fixamos  $m \geq 0$  temos

$$h_m := \mathcal{L}^m \mathbb{1} := \sum_{\mathcal{J}^m} |g'_J| = \sum_{\mathcal{J}^m} \epsilon_J \frac{|J|}{|A|} \tilde{g}'_J.$$

é uma função holomorfa em  $U$ , e como  $\sum_{\mathcal{J}^m} |\underline{J}| = |A|$ , ela satisfaz

$$e^{-C_0|A|} \leq h_m(x) \leq e^{C_0|A|} \quad \forall x \in A.$$

Consideramos  $\{h^{(m)} := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} h_m\}_{m \geq 0}$  e observamos que novamente pelo teorema de Montel esta é uma família normal em  $U$ , e portanto tem uma sub-sequência que converge uniformemente a uma função  $h_T \in Hol(U)$ , que satisfaz

$$e^{-C_0|A|} \leq h_T(x) \leq e^{C_0|A|} \quad \forall x \in A.$$

Como  $\mathcal{L}h^{(m)} = h^{(m)} + \frac{h_m - \mathbb{1}}{m}$ , deduzimos que  $\mathcal{L}h_T = h_T$ ; deduzimos

$$d\mu_T := h_T(x)dx \quad x \in A \tag{3.4}$$

é  $T$ -invariante, como  $h_T > e^{-C_0|A|}$  a medida é equivalente a Lebesgue. Observar também que

$$\int \mathcal{L}^m \mathbb{1} dx = \int \mathbb{1} dT_* \lambda = |A| \quad \forall m \implies \mu_T(A) = |A|.$$

<sup>1</sup>Em outras palavras,  $\mathcal{F} \subset Hol(U)$  é pre-compacto

**Proposição 3.3.1.** Se  $E \in \mathcal{B}_A$  é tal que  $T^1 E = E$ , então  $\mu_T(A) \in \{0, |A|\}$ . É dizer, o sistema  $(T, \mu_T)$  é ergódico.

*Demonstração.* Suponha que  $\mu_T(E) > 0$ : necessariamente  $\lambda(E) > 0$  e portanto quase-todo ponto  $x_0 \in E$  é ponto de densidade (Teorema de Lebesgue),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))}{2\epsilon} = 1.$$

Fixamos  $\epsilon > 0$  e para  $m \geq 1$  seja  $\underline{J} = \underline{J}^{(m)} \in \mathcal{J}^m$  o intervalo que contém  $x_0$ . Pelo Corolário 3.2.1 (parte 2) temos  $\lim_{m \rightarrow \infty} |\underline{J}^{(m)}| = 0$ , assim que se  $m$  é suficientemente grande, como  $x_0$  ponto de densidade temos que

$$\frac{|\underline{J}^{(m)} \cap E^c|}{|\underline{J}^{(m)}|} < \epsilon$$

onde escrevemos  $E^c = A \setminus E$ . Utilizando agora Lema 3.2.3 com  $g = g_{\underline{J}}$  e como  $E^c$  é  $T$ -invariante, temos

$$\frac{|\underline{J}^{(m)} \cap E^c|}{|\underline{J}^{(m)}|} = \frac{|g(E^c)|}{|g(A)|} \geq e^{-C_0|A|} \frac{|E^c|}{|A|}.$$

Isto implica que

$$\frac{|E|}{|A|} \geq 1 - \epsilon e^{C_0|A|} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1.$$

portanto,  $|E| = |A|$  como queríamos mostrar. ■

### 3.4 Exponentes de Lyapunov

Lembrar que  $T : W \rightarrow A$  está dado por  $T(x) = f_c^{N(x)}(x)$  onde  $N(x) = \text{ord}(J)$ ,  $J$  intervalo regular maximal que contém  $x$ . Como  $c$  é um parâmetro regular  $|W| = |A|$  (e portanto  $\mu_T(W) = |A|$ ), e

$$\text{Leb}(x \in W : N(x) \geq n) \leq C \exp(-\theta n)$$

para algumas constantes  $C, \theta > 0$ . Concluimos

$$\int_W N(x) d\mu_T(x) = \int_{N \leq n} N(x) d\mu_T + \int_{N > n} N(x) h_T(x) dx \leq n|A| + C e^{C_0|A| - \theta n} < \infty.$$

Por outro lado,  $\phi(x) = \log |T'(x)|$  também é integrável: temos  $|f'_c| \leq 4$  e portanto, pelo Corolário 3.2.1,

$$-C_0|A| - m \log(1 - c_1) \leq \phi(x) \leq N(x) \log 4 \Rightarrow \int \log |T'(x)| d\mu_T(x) < \infty.$$

Consideramos os valores médios

$$N_T = \frac{1}{|A|} \int N d\mu_T$$

$$\lambda_T = \frac{1}{|A|} \int \log |T'| d\mu_T$$

---

<sup>2</sup> $\mathcal{B}_A$  denotam os Borelianos em  $A$

**Definição 3.4.1.** Seja  $S : [a, b] = I \rightarrow I$  com derivada contínua e que preserva uma medida  $\mu$  (finita).

1. O expoente característico de  $S$  é o número

$$\lambda_S := \frac{1}{\mu(I)} \int \log |S'(x)| d\mu(x).$$

2. O expoente de Lyapunov em  $x \in I$  é

$$\chi_S(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(S^n)'(x)|$$

e dizemos que  $x$  é regular se o limite anterior existe em  $x$ .

Observar que

$$\frac{1}{n} \log |(S^n)'(x)| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |S'(S^k x)|,$$

e portanto, pelo teorema ergódico (Birkhoff) temos

$$\mu(\{x \in I : \chi(x) \text{ existe e } \chi(x) = \lambda_S\}) = \mu(I).$$

Em particular se  $\mu$  é equivalente a Lebesgue podemos trocar  $\mu$  por  $\lambda$  na igualdade anterior (observar que em geral Lebesgue não é  $S$  invariante).

Voltando ao nosso caso, observemos que um cuidado adicional é necessário para iterar  $T$ . Definimos para  $x \in W \cap T^{-1}W \cap \dots \cap T^{-(k-1)}W$ ,

$$N_k(x) := \sum_{j=0}^{k-1} N(T^j(x)) \Rightarrow T^k(x) = f^{N_k(x)}(x).$$

**Proposição 3.4.1.** Temos  $\lambda_T > 0$

*Demonstração.* Pelo Corolário 3.2.1,  $|(T^m)'(x)| \geq \exp(-C_0|A|)(1-c_1)^{-m}$ , e portanto se  $x$  é regular,

$$\lambda_T = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |(T^m)'(x)| \geq \frac{1}{1-c_1} > 0. \quad \blacksquare$$

Vamos agora utilizar um argumento típico de teoria ergódica, para deduzir o expoente de  $f$  conhecendo informação do mapa de retorno. Definimos  $\lambda_f := \frac{\lambda_T}{N_T}$ . Como o tempo de retorno ao intervalo  $A$  é maior ou igual a 2, temos  $N_T \geq 2$  e

$$\lambda_T \geq 2\lambda_f \lambda_P > 0.$$

Pelo teorema ergódico, para Lebesgue q.t.p.,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} N_k(x) &= N_T \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log |(T^k)'(x)| &= \lambda_T \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f^{N_k(x)})'(x)}{N_k(x)} = \lambda_f \end{aligned}$$

Consideramos  $N_k \leq n \leq N_{k+1}$  e utilizamos que  $|f'| \leq 4$  para obter

$$\log |(f^{N_{k+1}})'| - (N_{k+1} - n) \log 4 \leq \log |(f^n)'| \leq \log |(f^{N_k})'| + (n - N_k) \log 4,$$

e como  $\lim_k \frac{N_k(x)}{N_{k+1}(x)} = 1$ , finalmente obtemos

**Corolário 3.4.1.** *Para Lebesgue quase-todo  $x \in A$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \lambda_f > 0.$$

### 3.5 Acip para $f$

Vamos utilizar  $\mu_T$  para construir uma acip para  $f$ . Lembrar que  $I_c = [-\beta, \beta]$  é o maximal invariante da  $f$ . O procedimento é padrão: se  $\phi \in C(I)$  definimos  $S\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$  com

$$S\phi(x) = \sum_{0 \leq j < N(x)} \phi(f^j(x)).$$

Claramente  $|S\phi(x)| \leq \|\phi\|_\infty N(x)$ , e portanto é integrável com respeito a  $\mu_T$ . Definimos o funcional linear

$$\mu_f(\phi) := \int S\phi d\mu_T$$

Então  $\mu_f$  é um funcional linear positivo (limitado) em  $C(I)$ , assim define uma medida finita que denotamos pela mesma letra. Temos

$$\mu_f(I) = \int N(x) d\mu_T(x) = |A|N_T.$$

**Afirmção:** O suporte de  $\mu_f$  é  $[f_c(0), f_c^2(0)]$

*Demonstração.* Como  $c$  é regular necessariamente  $f_c(0) < \alpha^{(1)}$  (se não for assim, não teríamos intervalos regulares de ordem positiva dentro do  $A$ ), e similarmente  $f_c^2(0) > -\alpha$ . Então,

$$\text{supp}(\mu_f) = \bigcup_{n \geq 0} f_c^n(A) = [f_c(0), f_c^2(0)] = f_c(A) \cup f_c^2(A).$$

■

Para  $\phi \in C(I)$  podemos calcular

$$S(\phi \circ f) = S\phi + \phi \circ T - \phi \Rightarrow \mu_f(S(\phi \circ f)) = \mu_f(\phi)$$

e  $\mu_f$  é  $f$ -invariante.

**Afirmção:**  $\mu_f$  é  $f$  ergódica.

*Demonstração.* Se  $E \subset [f_c(0), f_c^2(0)]$  é  $f$ -invariante,  $E' := E \cap A$  é  $T$ -invariante, e portanto  $\mu_T(E \cap A) \in \{0, 1\}$ . Isto implica que  $\mu_f(E) = \{0, 1\}$ . ■

É claro também que  $\mu_f$  é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Na página 11 de [1] se calcula a densidade com respeito a Lebesgue (é utilizar o teorema de mudança de variáveis), porém não necessitaremos isto para o que segue, exceto mencionar que  $\mu_f$  é equivalente a Lebesgue em  $[f_c(0), f_c^2(0)]$ .

## Capítulo 4

# Propriedade de Markov e Parâmetros Fortemente Regulares

### 4.1 Sinopse

Neste capítulo começaremos a estudar a dependência da dinâmica do  $f_c$  com respeito ao parâmetro  $c$ . Como  $c = f_c(0)$  é a imagem do ponto crítico, a (pré)-órbita deste ponto é de central importância no estudo.

- Construiremos uma sequência  $(c^m)_{m \geq 2} \in [-2, -3/2]$  tal que
  - $c \in (c^{m+1}, c^m]$  implica  $c^{(m)} \in (\alpha^{(m)}, \alpha^{(m-1)})$  e portanto  $f_c|_{[\alpha, 0]}$  mapeia  $m$  vezes de forma Markoviana sobre  $A$  (é dizer, cobre completamente), e
  - $\lim_{m \rightarrow \infty} c^{(m)} = -2$ .
  - Para  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ ,  $M$  é o primeiro retorno de 0 a  $A$ .
- Depois em 4.2.1 estudaremos as sequências  $(\alpha^{(n)} = \alpha^{(n)}(c))_n, (\tilde{\alpha}^{(n)})_n$  de pré-imagens do ponto fixo  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} f_c(\alpha^{(n)}(c)) &= -\alpha^{(n-1)}(c) & \alpha^{(n)} < 0 \quad \forall n \\ f_c(\tilde{\alpha}^{(n)}) &= \alpha^{(n-1)} & \tilde{\alpha}^{(n)} < 0 \end{aligned}$$

(ver figura 4.1).

- Na proposição 4.2.2 veremos que para  $n \in [2, M - 2]$ , os intervalos  $C_n^+ = [\tilde{\alpha}^{(n-1)}, \tilde{\alpha}^{(n)}]$  e  $C_n^- = -C_n^+$  contidos em  $A = [\alpha, -\alpha]$  são regulares de ordem  $n$ ; mais ainda,  $C_n^\pm$  são os únicos elementos em  $\mathcal{J}$  de ordem  $n$ , e qualquer outro elemento de  $\mathcal{J}$  tem ordem maior que  $M$ .
- Depois introduziremos um conceito fundamental: intervalos fortemente regulares. Começaremos definindo

$$N(0) := M, \quad T(0) := f_c^M(0).$$

Se  $T(0)$  pertence a algum intervalo regular  $J \in \mathcal{J}^K$ , podemos definir, para  $0 \leq k \leq K$ ,  $T^{k+1}(0) := T^k(T(0))$ . Denotamos como  $J(k)$  o elemento de  $\mathcal{J}$  tal que  $T^k(0) \in \text{int}J(k)$ , e como  $N_k$  a soma de Birkhoff

$$N_k := \sum_0^{k-1} N(T^i(0)).$$

Dessa forma,  $T^k(0) = f_c^{N_k}(0)$ , para  $0 < k \leq K + 1$ .

**Definição (4.3.1).** Um parâmetro  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  é dito fortemente regular se  $T(0) \in \bigcap_{k \geq 0} T^{-k}(W)$  e a sequência  $(N(T^k(0)))_k$  satisfaz, para todo  $k \geq 1$

$$\sum_{\substack{0 < i \leq k \\ N(T^i(0)) > M}} N(T^i(0)) \leq 2^{-\sqrt{M}} \sum_{0 < i \leq k} N(T^i(0)).$$

Para estes parâmetros, as voltas do ponto crítico para o intervalo  $A$  acontecem, em sua maioria, nos intervalos regulares simples  $C_n^\pm$ . Também introduziremos uma definição similar para uma parte finita da órbita crítica (Definição 4.3.2).

- No final da seção daremos estimativas para as derivadas dos ramos inversos da  $f_c$  para intervalos regulares (até o nível  $K$ ). Veja proposição 4.3.1.

## 4.2 Propriedade de Markov para o retorno

Apresentaremos agora uma das ideias centrais da prova. Perceba que a imagem de  $A$  por  $f_c$  é  $[f_c(0), \alpha]$ , sendo  $0$  o ponto crítico, e portanto  $c = f_c(0)$  o valor crítico; é de esperar assim que a órbita de ponto crítico seja especial em nosso estudo. Pela definição,

$$[\alpha, 0] \xrightarrow{f_c} [c, \alpha] \xrightarrow{f_c} B = [\alpha, f_c^2(c)]$$

Observe que se  $c = f_c(0) > \alpha^{(1)}(c)$  temos  $B \subset A$  com inclusão estrita, para  $f_c(0) = \alpha^{(1)}(c)$  temos igualdade, e para  $f_c(0) < \alpha^{(1)}(c)$  a segunda imagem do intervalo  $[\alpha, 0]$  por  $f_c$  cobre completamente  $A$ . Assim, para  $c \leq \alpha^{(1)}(c)$  temos a *propriedade de Markov*:  $f^2([\alpha, 0]) \supset A$ .

Podemos continuar; definimos a sequência  $(\alpha^{(n)}(c))_n$  de pré imagens de  $\alpha$ , de forma que

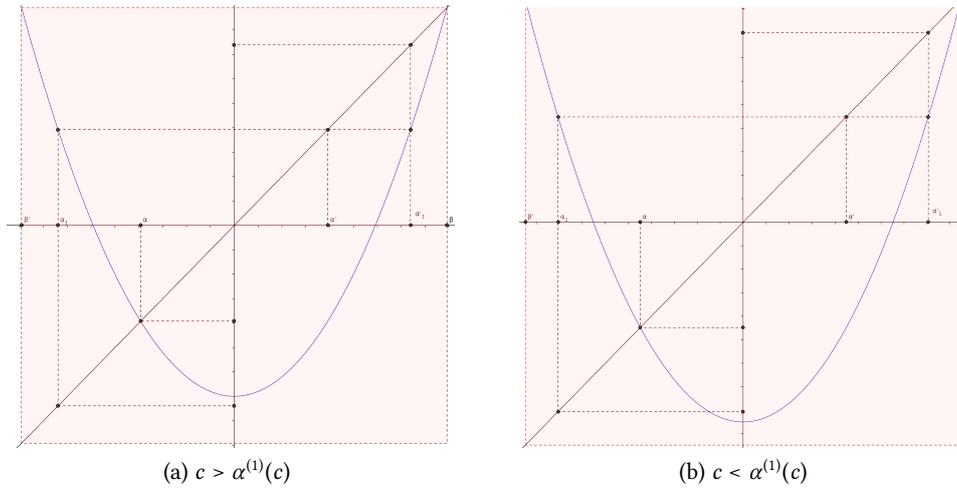
$$f_c(\alpha^{(n)}(c)) = -\alpha^{(n-1)}(c), \quad \alpha^{(n)} < 0 \quad \forall n,$$

$\alpha^{(0)}(c) := \alpha(c)$ . A sequência  $(\alpha^{(n)}(c))_n$  é decrescente e tende em  $n$  a  $-\beta$ , como pode ser observado pelo método gráfico de iterações.

Denotamos  $c^{(2)}$  o parâmetro tal que  $f_c^2(0) = -\alpha(c)$  (temos  $c^{(2)} < -\frac{3}{2}$ ) e seja  $\alpha^{(2)}(c) < 0$  tal que  $f_c(\alpha^{(2)}(c)) = -\alpha^{(1)}(c)$ . Para parâmetros tais que  $\alpha^{(2)}(c) < c \leq c^{(2)}$  temos

$$\begin{aligned} f_c([\alpha(c), 0]) &= [c, \alpha(c)] \supset [\alpha^{(1)}(c), \alpha(c)] \\ f_c^2([\alpha(c), 0]) &= [\alpha(c), f_c^2(0)] \supset A \\ f_c^3([\alpha(c), 0]) &\not\supset A \end{aligned}$$

é dizer, a função  $f$  sobre  $[\alpha(c), 0]$  cobre uma vez  $A$  de forma Markoviana. Procedendo indutivamente desta forma obtemos uma sequência  $(c^m)_{m \geq 2} \in [-2, -3/2]$  tal que



- $c \in (c^{(m+1)}, c^{(m)})$  implica  $c \in (\alpha^{(m)}(c), \alpha^{(m-1)}(c))$  e portanto  $f_c|_{[0, \alpha(c)]}$  mapeia  $m - 1$  vezes de forma Markoviana sobre  $A$ , e
- $\lim_{m \rightarrow \infty} c^{(m)} = -2$ .

A continuação apresentamos os detalhes. Verifica-se que, para  $c \in [-2, 0]$  as funções  $R_m(c) = \alpha^{(m)}(c)$  são definidas indutivamente como

$$\begin{cases} R_m(c) = -\sqrt{-R_{m-1}(c) - c} \\ R_0(c) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \end{cases}$$

Com isto deduzimos com uma indução simples que  $R_m : [-2, -3/2] \rightarrow [-2, -3/2]$  e portanto tem um ponto fixo  $c^{(m+1)} \in [-2, -3/2]$ . Observemos também que

$$\partial_c R_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4c}} \in [1/3, 1/2] \quad \text{se } c \in [-2, -3/2],$$

e como

$$\partial_c R_m = -\frac{1}{2R_m}(1 + \partial_c R_{m-1}),$$

se  $\partial_c R_{m-1} \in [-2, -3/2]$  temos

$$\begin{aligned} \partial_c R_m &\leq \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \partial_c R_m &\geq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $\partial_c R_m \in [1/3, 1/2]$  para todo  $n \geq 0$ . Em particular, como a derivada em todo ponto é menor que 1, pelo teorema de valor médio  $c^{(m+1)}$  é o único ponto fixo de  $R_m$ . Definiremos então, para  $c \in [-2, -3/2]$ , a sequência  $(c^{(m)})_m$  para  $m > 1$ , como raiz da equação  $\alpha^{(m-1)}(c) = c$ . Denote  $g_m(c) = R_m(c) - c$  e observe o seguinte:

- a função  $g_1$  tem uma única raiz em  $[-2, -3/2]$ , essa raiz é igual a  $c^{(2)}$ . Além disso, para qualquer parâmetro  $c \in [-2, c^{(2)}]$ , temos que o ponto crítico  $f_c(0) = c \in [-2, \alpha^{(1)}(c)]$ , pois  $g_1(c) > 0$ .
- Indutivamente, para  $m > 2$ , a função  $g_{m-1}$  tem valor positivo em  $c = -2$  e negativo em  $c = c^{(m-1)}$ , e possui raiz única  $c^{(m)} \in [-2, c^{(m-1)}]$ . Além disso, para qualquer parâmetro  $c \in [-2, c^{(m)}]$ , temos que o ponto crítico  $f_c(0) = c \in [-2, \alpha^{(m-1)}(c)]$ , pois  $g_m(c) > 0$ .

Dessa forma, a sequência  $(c^{(m)})_m$  está bem definida. Além disso, temos para qualquer  $m$ ,  $|g_m(-2)| \leq |\max((g_m)'|(c^{(m)}+2))|$  e  $|\min((g_m)'|(c^{(m)}+2))| \leq |g_m(-2)|$ . Como será visto na Observação 4.2.1,  $|g_m(-2)| = 4 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^m}$ . Assim,

$$6 \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^m} \leq c^{(m)} + 2 \leq 8 \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^m}.$$

Portanto, a sequência  $(c^{(m)})_m$  converge a  $-2$  e, mais que isso, temos para algum  $C > 0$

$$\frac{1}{C} 4^{-m} \leq c^{(m)} + 2 \leq C 4^{-m}. \quad (4.1)$$

A partir daqui, dado  $M \in \mathbb{N}$ , estudaremos o comportamento das funções para os parâmetros  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ . Pelo que vimos anteriormente, para  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ , os primeiros pontos da órbita do ponto crítico satisfazem:

$$\begin{aligned} \alpha^{(M-1)} &< f_c(0) < \alpha^{(M-2)} \\ -\alpha^{(M-n-1)} &< f_c^n(0) < -\alpha^{(M-n)} \quad \text{para } 1 < n < M \\ \alpha &< f_c^M(0) < -\alpha. \end{aligned}$$

Assim que  $M$  é o primeiro retorno de  $0$  à  $A$ .

#### 4.2.1 Dinâmica de $f_c$ para $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ :

Para estes parâmetros, podemos definir para qualquer natural  $0 < n < M$  a sequência  $(\tilde{\alpha}^{(n)})_n$  de pré-imagens do ponto fixo  $\alpha$  da seguinte forma:

$$f_c(\tilde{\alpha}^{(n)}) = \alpha^{(n-1)}, \quad \tilde{\alpha}^{(n)} < 0$$

Assim,  $\tilde{\alpha}^{(1)} = \alpha$ . Obtemos, então, a seguinte partição do intervalo  $I_c$ :

**Observação 4.2.1.** Para  $c = -2$ , temos:

$$f_{-2}(\pm 2 \cos \theta) = (2 \cos \theta)^2 - 2 = 2(2 \cos^2 \theta - 1) = 2 \cos 2\theta \quad e$$

$$f_{-2}(\pm 2 \sin \theta) = -2 \cos 2\theta.$$

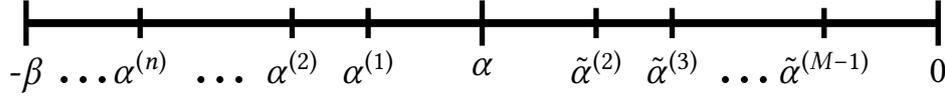


Figura 4.1: Partição pelas pre-imagens do ponto fixo.

Logo, os valores das pré-imagens definidas do ponto fixo  $\alpha(-2) = -1$  são:

$$\alpha^{(n)} = -2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}, \quad \tilde{\alpha}^{(n)} = -2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}.$$

Com isto, não é difícil notar que  $c = -2$  é um parâmetro regular, e mais,  $c = -2$  é um parâmetro também será um parâmetro fortemente regular definido em 4.3.1.

**Proposição 4.2.1.** Para  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ , existe  $C > 0$  tal que as seguintes relações valem:

1.  $\beta(c) + c \leq C4^{-M}$
2.  $C^{-1}4^{-n} \leq \alpha^{(n)}(c) - f_c(0) \leq C4^{-n}$ , para  $0 \leq n < M - 2$ ,
3.  $C^{-1}2^{-n} \leq |\tilde{\alpha}^{(n)}(c)| \leq C2^{-n}$ , para  $0 < n < M - 1$ .

*Demonstração.* Note que  $c \mapsto \beta(c) + c$  é uma função decrescente com raiz em  $c = -2$ , pela inequação (4.1), a primeira estimativa está garantida.

Por definição da sequência  $(c^{(m)})_m$ , temos que  $\alpha^{(M-1)}(c) < f_c(0) < \alpha^{(M-2)}(c)$ , portanto para  $0 \leq n < M - 2$ , temos

$$\alpha^{(n)}(c) - f_c(0) \geq \alpha^{(n)}(c) - \alpha^{(n+1)}(c) \geq 4^{-(n+1)}|A|,$$

pois  $f_c^{n+1}([\alpha^{(n+1)}(c), \alpha^{(n)}(c)]) = A$  e  $|f'_c| \leq 4$  em  $[-\beta, \beta]$ . Além disso, a derivada da função  $g(c) = \alpha^{(n)}(c) - c$  é negativa e  $g(-2) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}$ , portanto  $g(c) < g(-2)$ . A segunda desigualdade está garantida.

A terceira é uma implicação direta da relação  $|\tilde{\alpha}^{(n)}(c)| = \sqrt{\alpha^{(n-1)}(c) - c}$  e da segunda desigualdade. ■

**Proposição 4.2.2.** Para  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ , valem as seguintes afirmações a respeito de  $f_c$ :

1. Para todo natural  $n$ , os intervalos  $[\alpha^{(n)}, \alpha^{(n-1)}]$  e seus simétricos são regulares de ordem  $n$ ;
2. Para  $n \in [2, M - 2]$ , os intervalos  $C_n^+ = [\tilde{\alpha}^{(n-1)}, \tilde{\alpha}^{(n)}]$  e  $C_n^- = -C_n^+$  contidos em  $A = [\alpha, -\alpha]$  são regulares de ordem  $n$ .
3. Para  $n \in [2, M - 2]$ , os intervalos  $C_n^\pm$  são os únicos elementos em  $\mathcal{J}$  de ordem  $n$ . Qualquer outro elemento de  $\mathcal{J}$  tem ordem maior que  $M$ .

**Definição 4.2.1.** Os intervalos  $C_n^+, C_n^-$  da proposição anterior serão chamados de intervalos regulares simples.

*Demonstração.* Note que  $f^n|[\alpha^{(n)}, \alpha^{(n-1)}]$  é um difeomorfismo em  $A$ . Defina  $\theta_n$  como a pré-ima-  
gem de 0 por este difeomorfismo.

1. Temos que a extensão de  $f_c^n$  à  $(-\beta, \theta_{n-1})$  é um difeomorfismo em  $(f_c(0), \beta)$  que contém  $\hat{A}$ ,  
pois  $c < \alpha^{(1)}$ . Por simetria de  $f_c^n$  temos o resultado.
2. Para  $n \in [2, M-2]$ , tome a vizinhança  $(\alpha^{(n)}, \theta_{n-2})$  do intervalo  $[\alpha^{(n-1)}, \alpha^{(n-2)}] = f_c(C_n^\pm)$ . Per-  
ceba que  $f_c^{n-1}|(\alpha^{(n)}, \theta_{n-2})$  é um difeomorfismo em  $(f_c(0), -\alpha^{(1)}) \supset \hat{A}$  e que  $f_c^{-1}((\alpha^{(n)}, \theta_{n-2}))$   
tem duas componentes cada uma sendo uma vizinhança de um dos intervalos  $C_n^\pm$ .
3. Tome  $J \in \mathcal{J}$  distinto de  $C_n^\pm$  para  $n \in [2, M-2]$ , por definição do conjunto  $\mathcal{J}$  os inte-  
riores destes intervalos são disjuntos. Portanto  $J \subset [\tilde{\alpha}^{(M-2)}, -\tilde{\alpha}^{(M-2)}]$ , o tempo mínimo  
de retorno ao conjunto  $A$  para os pontos deste intervalo é  $M-1$  para  $C_{M-1}^\pm$  e  $M$  para  
 $(\tilde{\alpha}^{(M-1)}, -\tilde{\alpha}^{(M-1)})$ , a unicidade dos intervalos regulares simples em  $\mathcal{J}$  com sua respectiva  
ordem está garantida.

Se a ordem de  $J$  fosse  $M-1$ , então  $J = C_{M-1}^\pm$ . Perceba que  $f_c(C_{M-1}^\pm)$  é o intervalo regular  
 $J' = [\alpha^{(M-2)}, \alpha^{(M-2)}]$ , temos então a inversa  $g_{J'}(\alpha^{(1)}) = \alpha^{(M-1)} < c$ , portanto  $C_{M-1}^\pm$  não  
possui vizinhança sendo um difeomorfismo em  $\hat{A}$  e não é regular. Se a ordem de  $J$  fosse  
 $M$ , então  $J \subset [\tilde{\alpha}^{(M-2)}, -\tilde{\alpha}^{(M-2)}]$ , mas  $f_c([\tilde{\alpha}^{(M-2)}, -\tilde{\alpha}^{(M-2)}]) = [\alpha, f_c^M(0)] \subset A$ , portanto não  
existe intervalo regular de ordem  $M$  contido em  $A$ , temos o resultado. ■

Queremos limitar o conjunto de pontos que não são  $n$ -regulares em  $A$ , para isto iremos  
apresentar algumas limitações para as derivadas das iterações de  $f_c$  em certos intervalos. Para  
 $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ ,  $x \in I_c$  defina:

$$h_c(x) := (\beta(c)^2 - x^2)^{-1/2}$$

Assim, a derivada de  $f_c$  satisfaz

$$|f_c'(x)| = 2 \frac{h_c(x)}{h_c(f_c(x))} \left( 1 + \frac{\beta(c) + c}{x^2} \right)^{-1/2}$$

$$|(f_c^n)'(x)| = 2^n \frac{h_c(x)}{h_c(f_c^n(x))} \prod_0^{n-1} \left( 1 + \frac{\beta(c) + c}{(f_c^i(x))^2} \right)^{-1/2}$$

**Proposição 4.2.3.** *Para os seguintes intervalos regulares, valem as limitações a respeito de suas  
derivadas:*

1. Para  $n > 0$ ,  $x \in [\alpha^{(n)}(c), \alpha^{(n-1)}(c)]$ , temos:

$$\left| \ln|(f_c^n)'(x)| - \ln \left( 2^n \frac{h_c(x)}{h_c(f_c^n(x))} \right) \right| \leq Cn4^{-M}.$$

2. Para  $1 < n < M-1$ ,  $x \in C_n^\pm$ :

$$\left| \ln|(f_c^n)'(x)| - \ln \left( 2^n \frac{h_c(x)}{h_c(f_c^n(x))} \right) \right| \leq C4^{n-M}$$

*Demonstração.* Ambas derivam da relação

$$\left| \ln|(f_c^n)'(x)| - \ln\left(2^n \frac{h_c(x)}{h_c(f_c^n(x))}\right) \right| = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\beta(c) + c}{(f_c^i(x))^2}\right)$$

Para a primeira afirmação, temos que para  $x \in [\alpha^{(n)}(c), \alpha^{(n-1)}(c)]$ ,  $|f_c^i(x)| \geq |\alpha(c)|$  para  $0 \leq i < n$ , portanto  $\ln\left(1 + \frac{\beta(c) + c}{(f_c^i(x))^2}\right) < C(\beta(c) + c)$ , temos o resultado pela afirmação (1) da Prop. 4.2.1.

Em relação à segunda afirmação, temos que para  $x \in C_n^\pm$ ,  $n \in [2, M - 2]$  o mesmo ocorre para  $f_c^i(x)$ , exceto para  $i = 0$  que pela desigualdade 3 da proposição 4.2.1 tem módulo maior que  $C^{-1}2^{-n}$ , e portanto, pelo mesmo raciocínio anterior temos o resultado. ■

### 4.3 Parâmetros Fortemente Regulares

Apesar de que o ponto crítico 0 não pode pertencer a nenhum intervalo regular, como  $M$  é o primeiro tempo de retorno do ponto crítico a  $A$ , nós definimos:

$$N(0) := M, \quad T(0) := f_c^M(0).$$

Suponha que  $T(0) \in \bigcap_{0 \leq k < K} T^{-k}(W)$  para algum natural  $K$ , i.e.,  $T(0)$  pertence a algum intervalo regular  $J \in \mathcal{J}^K$ . Podemos então definir, para  $0 \leq k \leq K$ ,  $T^{k+1}(0) := T^k(T(0))$ . Denotamos como  $J(k)$  o elemento de  $\mathcal{J}$  tal que  $T^k(0) \in \text{int}J(k)$ , e como  $N_k$  a soma de Birkhoff

$$N_k := \sum_0^{k-1} N(T^i(0)).$$

Dessa forma,  $T^k(0) = f_c^{N_k}(0)$ , para  $0 < k \leq K + 1$ .

**Definição 4.3.1** (Parâmetros Fortemente Regulares:). *Um parâmetro  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  é dito fortemente regular se  $T(0) \in \bigcap_{k \geq 0} T^{-k}(W)$  e a sequência  $(N(T^k(0)))_k$  satisfaz, para todo  $k \geq 1$*

$$\sum_{\substack{0 < i \leq k \\ N(T^i(0)) > M}} N(T^i(0)) \leq 2^{-\sqrt{M}} \sum_{0 < i \leq k} N(T^i(0)).$$

*Dessa forma, para estes parâmetros, as voltas do ponto crítico para o intervalo  $A$  acontecem, em sua maioria, nos intervalos regulares simples  $C_n^\pm$ .*

Também fazemos esta definição para uma parte finita da órbita crítica.

**Definição 4.3.2.** *Um parâmetro  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  é dito fortemente regular até o nível  $K$  se  $T(0) \in \bigcap_{0 \leq k < K} T^{-k}(W)$  e a inequação acima vale para  $1 < k \leq K$ .*

Perceba que para um parâmetro fortemente regular  $c$ , se  $N(T^k(0)) > M$ , quer dizer que  $T^k(0)$  não pertence a nenhum intervalo regular simples, isto é,  $T^k(0) \in (\tilde{\alpha}^{(M-2)}, -\tilde{\alpha}^{(M-2)})$  que pela Proposição 4.2.1 tem tamanho  $\asymp 2^{-M}$ , e portanto

$$N(T^k(0)) \leq \frac{2^{-\sqrt{M}}}{1 - 2^{-\sqrt{M}}}(N_k - M).$$

Dessa forma, para que  $N(T^k(0))$  seja maior que  $M$ , é preciso  $N_k > 2^{\sqrt{M}}M$ , isto é, todos os retornos de 0 para  $A$  acontecem em intervalos regulares simples até o iterado  $2^{\sqrt{M}}M$ .

### 4.3.1 Dinâmica de $f_c$ para parâmetros fortemente regulares até o nível $K$ :

Lembre-se que aqui, estamos considerando sempre o parâmetro  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ .

**Definição 4.3.3.** Se  $T(0) \in \bigcap_{0 \leq k < K} T^{-k}(W)$ , construiremos uma seqüência decrescente de intervalos encaixantes  $B(k)$  contendo o ponto crítico  $f_c(0)$ . Defina  $B(1) := [\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)}]$ , intervalo regular de ordem  $(M-1)$  contendo  $f_c(0)$ . Para  $1 \leq k \leq K$ , sendo  $J(k) \in \mathcal{J}$  tal que  $T^k(0) \in J(k)$ , defina indutivamente o conjunto pelo seu ramo inverso:

$$g_{B(k+1)} := g_{B(k)} \circ g_{J(k)}; \quad B(k+1) = g_{B(k+1)}(A),$$

Assim,  $B(k+1)$  é regular de ordem  $N_{k+1} - 1$  e também contém  $f_c(0)$

Também limitaremos as derivadas para estes intervalos.

**Proposição 4.3.1** (Condição de Collet-Eckmann). Se  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  é um parâmetro fortemente regular até o nível  $K$ , então temos para  $1 \leq k \leq K+1$ , e para todo  $x \in A$

$$\left| \ln \left( |(g_{B(k)})'(x)| \frac{h_c(g_{B(k)}(x))}{h_c(x)} \right) + (N_k - 1) \ln 2 \right| \leq CM^{-1}N_k.$$

*Demonstração.* Seja  $g_{B(k)} = g_{B(1)} \circ g_{J(1)} \circ \dots \circ g_{J(k-1)}$ , para  $1 \leq k \leq K+1$ , defina:

$$x_k = x; \quad x_{k-1} = g_{J(k-1)} \circ g_{J(k)}(x); \quad \dots \quad x_1 = g_{J(1)} \circ \dots \circ g_{J(k-1)}(x),$$

teremos portanto  $g_{B(1)}(x_1) = g_{B(k)}(x)$  e por definição dos intervalos  $J(\ell)$  temos que  $x_\ell \in A$  para  $\ell \in [1, k]$ . Dessa forma, utilizando a regra da cadeia, teremos

$$|(g_{B(k)})'(x)| = |(g_{B(1)})'(x_1)| \cdot |(g_{J(1)})'(x_2)| \cdot \dots \cdot |(g_{J(k-1)})'(x)|,$$

e portanto

$$\left| \ln \left( 2^{N_k-1} |(g_{B(k)})'(x)| \frac{h_c(g_{B(k)}(x))}{h_c(x)} \right) \right| \leq \left| \ln \left( 2^{M-1} |(g_{B(1)})'(x_1)| \frac{h_c(g_{B(k)}(x))}{h_c(x_1)} \right) \right| + \sum_{\ell=1}^{k-1} \left| \ln \left( 2^{\text{ord}(J(\ell))} |(g_{J(\ell)})'(x_{\ell+1})| \frac{h_c(x_\ell)}{h_c(x_{\ell+1})} \right) \right|.$$

Pela proposição 4.2.3 parte (1), temos a limitação para o primeiro termo:

$$R_0 = \left| \ln \left( |(g_{B(1)})'(x)| \frac{h_c(g_{B(1)}(x))}{h_c(x)} \right) + (M-1) \ln 2 \right| \leq CM4^{-M}.$$

Para limitar os termos referentes aos intervalos  $J(\ell)$ , analisaremos os casos para  $J(\ell)$  intervalo regular simples e para  $J(\ell) \neq C_n^\pm$ , i.e., os intervalos não simples.

Pela mesma proposição, parte (2), temos que se  $J(\ell)$  é um intervalo regular simples com ordem  $\text{ord}(J(\ell))$ , então para todo  $x \in A$

$$\left| \ln \left( |(g_{J(\ell)})'(x)| \frac{h_c(g_{J(\ell)}(x))}{h_c(x)} \right) + \text{ord}(J(\ell)) \ln 2 \right| \leq C4^{\text{ord}(J(\ell)) - M}.$$

E portanto

$$\begin{aligned} R_s &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ J(\ell) \text{ simples}}}^{k-1} \left| \ln \left( 2^{\text{ord}(J(\ell))} |(g_{J(\ell)})'(x_{\ell+1})| \frac{h_c(x_\ell)}{h_c(x_{\ell+1})} \right) \right| \leq C4^{-M} \sum_{i=1}^{M-2} 4^{i \#\{\ell \mid \text{ord}(J(\ell)) = i\}} \\ &\leq C4^{-M} \sum_{i=1}^{M-2} 4^i \frac{N_k}{n} \leq CM^{-1} N_k. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $J(\ell)$  é um intervalo regular qualquer, teremos:

**Lema 4.3.1.** *Para todo  $J \in \mathcal{J}$  existe  $C > 0$  tal que se  $x \in A$ , temos*

$$\left| \ln \left( |(g_J)'(x)| \frac{h_c(g_J(x))}{h_c(x)} \right) + \text{ord}(J) \ln 2 \right| \leq \text{ord}(J) \ln 2 + C.$$

*Demonstração.* Como ambos  $x$  e  $g_J(x)$  estão em  $A$ , o termo  $\ln \frac{h_c(g_J(x))}{h_c(x)}$  é limitado. Além disso, temos  $|(g_J)'| \geq 4^{-\text{ord}(J)}$  pois  $|f'_c| \leq 4$  em  $[-\beta, \beta]$ . Além disso, como  $(g_J)'$  é contínua em um compacto, temos  $|(g_J)'| < C$ . Com isso, temos a estimativa do Lema. ■

Portanto, para os termos associados aos intervalos não simples  $J(\ell) \neq C_n^\pm$ ,  $0 \leq \ell < k$ , pelo fato de que o parâmetro  $c$  é fortemente regular até o nível  $K$ , temos:

$$\begin{aligned} R_{ns} &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ J(\ell) \neq C_n^\pm}}^{k-1} \left| \ln \left( 2^{\text{ord}(J(\ell))} |(g_{J(\ell)})'(x_{\ell+1})| \frac{h_c(x_\ell)}{h_c(x_{\ell+1})} \right) \right| \leq \sum_{\substack{\ell=1 \\ J(\ell) \neq C_n^\pm}}^{k-1} (C + N(T^\ell(0))) \\ &\leq (1 + CM^{-1}) 2^{-\sqrt{M}} (N_k - M) \end{aligned}$$

Temos, enfim,  $R_0 + R_s + R_{ns} \leq CM^{-1} N_k$ . ■

## Capítulo 5

# Parâmetros Fortemente Regulares são Regulares

### 5.1 Sinopse

O objetivo desta parte é demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 5.1.1.** *Existe um natural  $N$  tal que para todo  $M > N$  qualquer parâmetro fortemente regular  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  é também um parâmetro regular.*

O resultado é natural, porém técnico. De todas as formas, os argumentos deste capítulo serão utilizados também no seguinte.

### 5.2 Intervalos singulares

No resto deste capítulo estudaremos o valor de  $\text{Leb}(\{x \in A : x \text{ não é } n\text{-regular}\})$  para cada natural  $n$ . Denotemos  $\Delta_n = f_c^{-n}(\{\alpha, -\alpha\})$  (cf. Lema 3.2.1).

**Definição 5.2.1.** *Dado um natural  $n > 1$ , um intervalo  $S \subset A$  com pontos de fronteira consecutivos em  $\Delta_n$  é dito  $n$ -singular, se  $S$  não está contido em nenhum intervalo regular de ordem  $\leq n$ . Denotamos o conjunto de intervalos  $n$ -singulares como  $\text{Sin}(n)$ .*

**Observação 5.2.1.** *Perceba que o conjunto  $\{x \in A : x \text{ não é } n\text{-regular}\}$ , o qual queremos limitar, é igual a união disjunta dos intervalos  $n$ -singulares.*

Note que qualquer intervalo regular  $J = [\gamma^-, \gamma^+]$  de ordem  $N$  também tem seus pontos de fronteira como dois pontos consecutivos em  $\Delta_N$ . Além disso, sua vizinhança associada  $\hat{J} = (\hat{\gamma}^-, \hat{\gamma}^+)$  satisfaz  $\hat{\gamma}^- < \gamma^- < \gamma^+ < \hat{\gamma}^+$  pontos consecutivos em  $\Delta_{N+1}$  (ver Lema 3.2.1).

Vamos refinar agora a partição dinâmica definida pelas pre-imagens do  $\alpha$ ; vamos definir primeiro  $\check{J}$  uma vizinhança intermediária de  $J$ , de modo que  $J \subset \check{J} \subset \hat{J}$ . Para isto, definiremos a sequência  $(\check{\alpha}^{(n)})_n$  da seguinte forma:

•

Para  $n$  ímpar (resp. par), defina  $\check{\alpha}^{(n)}$  como o elemento de  $\Delta_n$  imediatamente à esquerda (resp. à direita) do ponto fixo  $\alpha$ . Dessa forma,

$$\check{\alpha}^{(0)} = -\alpha; \quad \check{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)}; \quad \check{\alpha}^{(2)} = \tilde{\alpha}^{(2)}; \quad f_c(\check{\alpha}^{(n+1)}) = \check{\alpha}^{(n)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Definimos  $\check{A} := (\check{\alpha}^{(3)}, -\check{\alpha}^{(3)})$ , satisfazendo assim  $A \subset \check{A} \subset \hat{A}$ . Para um intervalo regular  $J$  de ordem  $n$ , definimos  $\check{J}$  como a imagem  $g_J(\check{A})$ , dessa forma, os pontos de fronteira de  $\check{J}$  são os elementos de  $\Delta_{n+3}$  imediatamente à esquerda e à direita dos pontos de fronteira de  $J$  satisfazendo  $J \subset \check{J} \subset \hat{J}$ .

Queremos compreender o comportamento dos intervalos  $n$ -singulares para um parâmetro  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ . Para  $2 \leq n \leq M-2$ , devido a natureza dos intervalos regulares simples e pela proposição 4.2.2,  $[\check{\alpha}^{(n)}, -\check{\alpha}^{(n)}]$  é o único intervalo  $n$ -singular. Para  $n = M-1$  ou  $n = M$ , existem 3 intervalos  $n$ -singulares que são  $C_{M-1}^\pm$  e  $[\check{\alpha}^{(M-1)}, -\check{\alpha}^{(M-1)}]$ .

Analisaremos indutivamente os intervalos  $n$ -singulares para  $n > M$ . Para isto, definimos a seqüência decrescente de intervalos do ponto crítico 0, para  $k \geq 1$ , defina

$$A(k) := f_c^{-1}(B(k)); \quad \check{A}(k) := f_c^{-1}(\check{B}(k)),$$

onde  $B(k)$  são os intervalos definidos em 4.3.3 e  $\check{B}(k) = g_{B(k)}(\check{A})$ .

Pela definição dos intervalos  $B(k)$ , temos que  $A(k) \in \text{Sin}(N_k)$ ; é igual à componente conexa de  $A \setminus \Delta_{N_k}$  que contém 0. Os pontos de fronteira de  $\check{A}(k)$  são os pontos imediatamente à esquerda e à direita dos pontos de fronteira de  $A(k)$  em  $\Delta_{N_k+3}$ .

A partir de agora, e para o resto desta seção, estudaremos os parâmetros  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  que são fortemente regulares até o level  $K$ .

**Definição 5.2.2.** *Para um natural  $n \geq M+3$  tal que  $N_K + 3 \leq n < N_{K+1} + 3$ , dividiremos o conjunto  $\text{Sin}(n)$  em três categorias. Um intervalo  $S \in \text{Sin}(n)$  é dito central se  $S \subset \check{A}(K)$ ; periférico se  $S$  e  $\hat{A}(1)$  têm interiores disjuntos; e lateral se  $S \subset \hat{A}(1) \setminus \check{A}(K)$ .*

### 5.2.1 Intervalos Singulares Centrais

Daremos, primeiramente uma restrição para a quantidade de intervalos deste tipo. Em seguida, apresentaremos as limitações para o tamanho destes intervalos.

#### Proposição 5.2.1.

1. Se  $J(K)$  é um intervalo regular simples, então existem, no máximo, 9 intervalos  $n$ -singulares centrais.
2. Se  $J(K)$  não é simples, então existem, no máximo,  $2^{CN_K 2^{-\sqrt{M}}}$  intervalos  $n$ -singulares centrais, para uma constante  $C > 0$ .

*Demonstração.* Lembramos da restrição  $3 \leq n - N_K \leq \text{ord}(J(K)) + 2$ .

1. Analisaremos supondo que  $g_{B(K)}$  preserva orientação, o caso contrário é análogo. Sabemos que qualquer intervalo  $n$ -singular central  $S$  está contido em  $\check{A}(K)$  e portanto  $S^+ := f_c(S)$  está contido em  $f_c(\check{A}(K)) = [f_c(0), \gamma]$ , em que  $\gamma$  é o ponto de fronteira à

direita de  $\check{B}(K)$ . Além disso, ou  $0 \in S$  e dessa forma  $f_c(0)$  é um dos pontos de fronteira de  $S^+$ , ou seus pontos de fronteira são consecutivos em  $\Delta_{n-1}$ .

Com isto, como  $B(K)$  é regular de ordem  $N_K - 1$ ,  $S' := f_c^{N_K-1}(S^+) \subset [f_c^{N_K}(0), -\check{\alpha}^{(3)}]$  com pontos de fronteira consecutivos em  $\Delta_{n-N_K}$ , ou tendo  $f_c^{N_K}(0)$  como um de seus pontos de fronteira. Pela restrição em relação a  $n$ , e como  $J(K)$  é simples, temos que  $n - N_K \leq M$  e portanto  $\Delta_{n-N_K} \subset \Delta_M$ . Avaliaremos, portanto, o pior caso em que  $\Delta_{n-N_K} = \Delta_M$  e  $J(K) = C_{M-2}^+$ .

A primeira opção para o intervalo  $S$  é uma vizinhança de  $0$ , não haverá nenhuma restrição para sua existência. Caso  $0 \notin S$ , podemos concluir que os pontos de fronteira de  $S'$  são de fato dois pontos consecutivos em  $\Delta_M$ . Dessa forma, teremos duas opções para este intervalo, ele será  $M$ -singular, ou  $M$ -regular.

Suponha, primeiramente, que  $S' = f_c^{N_K-1}(S^+) \in \text{Sin}(k)$  para algum  $k \leq M$ . Então, como visto anteriormente, ou  $S' = C_{M-1}^+$  ou  $S' = [\check{\alpha}^{(M-1)}, -\check{\alpha}^{(M-1)}]$ , o que nos dá seis opções para  $S$ .

Suponha agora, que  $S'$  não é singular para nenhum natural  $k \leq M$ . Então existe um intervalo regular  $J$  de ordem  $m \leq n - N_K \leq M$  tal que  $S' \subset J$ . Dessa forma, se  $f_c^{N_K}(0)$  não pertence a vizinhança  $\hat{J}$  correspondente, podemos afirmar que os dois intervalos  $f_c^{-1}(g_{B(K)}(J))$  são regulares de ordem  $N_K + m \leq n$ , um deles contendo  $S$ . Porém, isto contradiz o fato do intervalo  $S$  ser  $n$ -singular e, portanto, não pode ocorrer.

O que nos traz nossas duas últimas opções, se  $f_c^{N_K}(0) \in \hat{J}$ , não haverá restrições para a existência de  $S$  e, portanto, teremos mais duas possibilidades para  $S$ , totalizando nove.

2. Por ser uma restrição mais grosseira, a ideia é mais simples. As imagens, por  $f_c^{N_K}$  dos pontos de fronteira dos possíveis intervalos  $S$  pertencem a  $\Delta_{n-N_K}$  como visto anteriormente. A cardinalidade de  $\Delta_{n-N_K}$  é, no máximo,  $2^{n-N_K+1}$ , e por hipótese,  $n - N_K + 1 \leq \text{ord}(J(K)) + 3$ . Como  $c$  é fortemente regular até o level  $K$ , temos portanto que a cardinalidade de  $\Delta_{n-N_K}$  é, no máximo,  $2^{C2^{-\sqrt{M}}N_K}$ . O que, com uma diferente constante  $C$ , também é uma restrição para os possíveis intervalos  $S$ .

■

Para limitar o tamanho dos intervalos singulares centrais, basta limitar o tamanho dos intervalos  $\check{A}(K)$ , de fato temos:

**Proposição 5.2.2.** Para  $1 \leq k \leq K + 1$ , o tamanho do intervalo  $\check{A}(k)$  satisfaz

$$\left| \ln|\check{A}(k)| + \frac{1}{2}(N_k + M)\ln 2 \right| \leq CM^{-1}N_k.$$

*Demonstração.* Cada componente  $C$  de  $\check{B}(k) \setminus B(k)$  tem seu tamanho controlado pelo tamanho de  $B(k)$ :

$$\check{B}(k) \leq C|B(k)|, \quad |C| \geq C^{-1}|B(k)|.$$

E portanto, pela relação  $\check{A}(k) = f_c^{-1}(\check{B}(k))$ , temos:

$$C^{-1}|B(k)|^{1/2} \leq |\check{A}(k)| \leq C|B(k)|^{1/2}.$$

Precisamos, portanto controlar o tamanho de  $B(k)$ , pela Prop. 4.3.1, temos a seguinte relação:

$$\left| \ln |(g_{B(k)})'(x)| - \ln \left( \frac{h_c(x)}{2^{(N_k-1)} h_c(g_{B(k)}(x))} \right) \right| \leq CM^{-1}N_k,$$

e, portanto

$$\frac{h_c(x)}{2^{(N_k-1)} h_c(g_{B(k)}(x))} \cdot e^{-CM^{-1}N_k} \leq |g'_{B(k)}(x)| \leq \frac{h_c(x)}{2^{(N_k-1)} h_c(g_{B(k)}(x))} \cdot e^{CM^{-1}N_k}.$$

Como  $x \in A$  vale que  $C^{-1} \leq h_c(x) \leq C$ ; além disto, como  $B(k) \subset [\alpha^{M-1}, \alpha^{M-2}]$  pela inequação (3) de proposição 4.2.1, temos que  $C^{-1}2^M \leq h_c(g_{B(k)}(x)) \leq C2^M$ . Com isto, temos que:

$$C^{-1}2^{-(N_k+M)} \leq \frac{h_c(x)}{2^{(N_k-1)} h_c(g_{B(k)}(x))} \leq C2^{-(N_k+M)}.$$

Concluimos que

$$C^{-1}2^{-(N_k+M)} e^{-CM^{-1}N_k} \leq |g'_{B(k)}(x)| \leq C2^{-(N_k+M)} e^{CM^{-1}N_k}. \quad (5.1)$$

Como o tamanho do intervalo  $A$  é limitado, incorporamos estes valores à contante  $C$  e teremos a mesma limitação acima para  $|B(k)|$ , assim pela relação entre  $|B(k)|$  e  $|A(k)|$  teremos:

$$\left( C^{-1}2^{-(N_k+M)} e^{-CM^{-1}N_k} \right)^{1/2} \leq |\check{A}(k)| \leq \left( C2^{-(N_k+M)} e^{CM^{-1}N_k} \right)^{1/2},$$

com mais algumas manipulações temos o resultado. ■

**Corolário 5.2.1.** *O tamanho total dos intervalos singulares centrais de ordem  $n$ , denotado como  $E_c(n)$ , satisfaz*

$$E_c(n) \leq |\check{A}(K)| \leq 2^{-1/2(N_K+M)} 2^{CM^{-1}N_K}$$

## 5.2.2 Intervalos Singulares Periféricos

Para estes intervalos, iremos relacionar os intervalos singulares em  $Sin(n)$  à outros intervalos singulares periféricos de menor ordem. Com isso, teremos a base para o passo indutivo que será necessário adiante. Lembramos que estamos supondo  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  parâmetro fortemente regular até o level  $K$  tal que  $N_K + 3 \leq n < N_{K+1} + 3$

**Proposição 5.2.3.** *Sejam  $B_0$  o intervalo regular  $[\alpha^{(M-2)}, \alpha^{(M-3)}]$  de ordem  $M-2$  e  $S \in Sin(n)$  um intervalo singular periférico. Então  $S^+ := f_c(S)$  satisfaz que:*

- ou  $S^+ = g_{B_0}(S^*)$ , para algum intervalo  $S^* \in Sin(n-M+1)$ ;
- ou  $S^+ = g_{B_0} \circ g_{C_2^-}(S^*)$ , para algum intervalo  $S^* \in Sin(n-M-1)$ .

onde  $C_2^-$  é o intervalo regular simples  $[-\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$ .

*Demonstração.* Lembramos que, por definição dos intervalos periféricos,  $S \subset C_{M-1}^+ \cup C_{M-1}^-$  e portanto  $S^+ \subset B_0$ , além disso seus pontos de fronteira são consecutivos em  $\Delta_n$ . Utilizamos agora o mesmo raciocínio da parte (1) da prova da proposição 5.2.1. Note que  $S' := f_c^{M-2}(S^+) \subset f_c^{M-2}(B_0) = A$  e os pontos de fronteira de  $S'$  são consecutivos em  $\Delta_{n-M+1}$ , temos então duas opções:

- Se  $S'$  é  $(n - M + 1)$ -singular, então  $S' = S^*$  e  $S = g_{B_0}(S^*)$ .
- Se não, então  $S' \subset J_0$  para algum  $J_0 \in \mathcal{J}$ , perceba que a única possibilidade para  $J_0$  é o intervalo regular simples  $C_2^-$ , para qualquer outra possibilidade o ponto crítico  $f_c^j(0) \notin \hat{J}_0$  para  $1 \leq j < M-1$ , fazendo com que a componente de  $f_c^{-1}(g_{B_0}(J_0))$  contendo  $S$  seja regular, contradizendo o fato de  $S$  ser singular.

Mais que isso, como  $S$  não intersecta  $\text{int}\check{A}(1)$ , então  $S' \subset [-\check{\alpha}^{(2)}, -\check{\alpha}^{(4)}]$ , e portanto,  $S^* := f_c^2(S') = f_c^M(S^+) \subset [\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$ . Basta, então, mostrar que  $S^*$  é  $(n - M - 1)$ -singular.

De fato, os pontos de fronteira de  $S^*$  são consecutivos em  $\Delta_{n-M-1}$  e, como  $f_c^{M-1}(0) \in [-\alpha, -\alpha^{(1)}]$ , então para qualquer  $J_0 \in \mathcal{J}$  em  $[\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$  o ponto crítico não pertence a  $g_{C_2^-}(\hat{J}_0)$ , fazendo com que a componente de  $f_c^{-1}(g_{B_0} \circ g_{C_2^-}(J_0))$  contendo  $S$  seja regular. Portanto  $S^* \in \text{Sin}(n - M - 1)$ . ■

Precisamos, também, de uma limitação para o tamanho total dos intervalos singulares periféricos de ordem  $n$ , denotado como  $E_p(n)$ . A partir daqui, denotamos como  $E(n)$  a soma do comprimento de todos os intervalos  $n$ -singulares.

**Proposição 5.2.4.** *A medida total dos intervalos  $n$ -singulares periféricos satisfaz*

$$E_p(n) \leq C2^{-M}E(n - M - 1).$$

*Demonstração.* Primeiro relacionaremos os tamanhos de  $S$  com  $S^+$ . Como  $S$  é periférico, ele tem seu interior disjunto ao interior de  $\check{A}(1)$ , dessa forma pela Prop. 5.2.2 com  $k = 1$ , temos que para todo  $x \in S$ ,  $|x| \geq C^{-1}2^{-M}$ . Como  $S^+ = f_c(S)$ , temos a relação  $|S| = \frac{|S^+|}{\max_{x,y \in S} |x + y|}$ , e portanto

$$|S| \leq C^{-1}2^M|S^+|.$$

Sabemos que ou  $S^+ = g_{B_0}(S^*)$  para  $S^* \in \text{Sin}(n - M + 1)$  ou  $S^+ = g_{B_0} \circ g_{C_2^-}(S^*)$  para  $S^* \in \text{Sin}(n - M - 1)$ .  $B_0 = [\alpha^{(M-2)}, \alpha^{(M-3)}]$ , logo pela Prop. 4.2.3 parte (1), temos que para todo  $x \in A$ :

$$\left| \ln|(g_{B_0})'(x)| - \ln \left( \frac{h_c(x)}{2^{(M-2)}h_c(g_{B_0}(x))} \right) \right| \leq C(M - 2)4^{-M}.$$

Utilizando o mesmo raciocínio da demonstração da Prop. 5.2.2, temos que pela Prop. 4.2.1, para todo  $x \in A$ ,  $C^{-1}2^M \leq h_c(g_{B_0}(x)) \leq C2^M$ , logo

$$C^{-1}4^{-M} \leq \frac{h_c(x)}{2^{(M-2)}h_c(g_{B_0}(x))} \leq C4^{-M}.$$

Pelas duas relações acima, temos para todo  $x \in A$

$$-\ln(C4^{-M}) - C(M-2)4^{-M} \leq \ln|g'_{B_0}(x)| \leq \ln(C4^{-M}) + C(M-2)4^{-M}.$$

Concluimos que para  $M$  suficientemente grande e uma diferente constante  $C$ :

$$|g'_{B_0}(x)| \leq C4^{-M} e^{C4^{-M}(M-2)} \leq C4^{-M}.$$

Como  $|g'_{C_2}(x)| \leq C$ , temos também  $|(g_{B_0} \circ g_{C_2})'(x)| \leq C4^{-M}$ . Obtemos assim  $|S^+| \leq C4^{-M}|S^*|$ , e portanto  $|S| \leq C2^{-M}|S^*|$ . Como  $E(n)$  é uma sequência não crescente, temos a seguinte relação:

$$E_p(n) \leq C2^{-M}(E(n-M+1) + E(n-M-1)) \leq C2^{-M}E(n-M-1).$$

■

### 5.2.3 Intervalos Singulares Laterais

Consideraremos agora os intervalos  $S$   $n$ -singulares contidos em  $\check{A}(1) \setminus \check{A}(K)$ , lembrando que estamos considerando  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  fortemente regular até o level  $K$ . Para cada  $1 \leq k \leq K$ , os pontos de fronteira do intervalo  $\check{A}(k)$  pertencem a  $\Delta_{N_k+3}$  e, portanto, como os pontos de fronteira de  $S$  pertencem a  $\Delta_n$  e por nossa restrição  $N_k+3 \leq n$ , temos que  $S \subset \check{A}(k)$  e  $S \cap \text{int}\check{A}(k+1) = \emptyset$  para algum  $k < K$ .

**Definição 5.2.3.** *Seja  $k = k(S)$  o maior inteiro tal que  $S \subset \check{A}(k)$ , dizemos que  $k$  é o level de  $S$ . O level é estacionário se  $A(k) = A(k+1)$ .*

Perceba que nunca teremos  $B(k) = B(k+1)$ , mas eles podem ter o mesmo ponto de fronteira à direita e, com isso, teríamos  $A(k) = A(k+1)$ . Isto acontece apenas quando  $J(k) = C_2^-$  se  $g_{B(k)}$  preserva a orientação, ou  $J(k) = C_2^+$  se  $g_{B(k)}$  inverte a orientação. No entanto, pela forma como são definidos, os intervalos  $\check{A}(k)$  e  $\check{A}(k+1)$  nunca serão iguais.

Assim como foi feito para os intervalos periféricos, iremos relacionar os intervalos  $n$ -singulares laterais, com os intervalos singulares de ordem inferior. Na proposição a seguir, consideramos  $D^+ := [\check{\alpha}^{(3),\alpha}]$  e  $D^- = -D^+$  que são regulares de ordem 3.

**Proposição 5.2.5.** *Seja  $S \in \text{Sin}(n)$  lateral de level  $k$  estacionário, então:*

- Se  $g_{B(k)}$  preserva a orientação, então existe um intervalo  $S^* \in \text{Sin}(n - N_k - 3)$ , contido em  $[\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$  tal que  $S^+ := f_c(S)$  é igual a  $g_{B(k)} \circ g_{D^-}(S^*)$ .
- Se  $g_{B(k)}$  inverte a orientação, então existe um intervalo  $S^* \in \text{Sin}(n - N_k - 3)$ , contido em  $[\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$  tal que  $S^+ := f_c(S)$  é igual a  $g_{B(k)} \circ g_{D^+}(S^*)$ .

*Demonstração.* Provaremos o caso em que  $g_{B(k)}$  preserva a orientação, o outro caso será análogo e pode ser encontrado no texto do Yoccoz [1]. Note que como  $k(S)$  é estacionário, então  $J(k) = C_2^+$  tem ordem 2 e, portanto  $N_{k+1} = N_k + 2$ .

Temos que  $S \subset \check{A}(k)$  e  $S \cap \text{int}\check{A}(k+1) = \emptyset$ , então  $S^+ = f_c(S) \subset \check{B}(k) \setminus \check{B}(k+1)$  e, pela observação anterior, o intervalo  $S' := f_c^{N_k-1}(S^+) \subset [-\check{\alpha}^{(5)}, -\check{\alpha}^{(3)}]$  e tem pontos de fronteira em  $\Delta_{n-N_k}$ . Com isso, basta que  $S^* := f_c^3(S') \subset [\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$  seja  $(n - N_k - 3)$ -singular.

De fato, os pontos de fronteira de  $S^*$  pertencem a  $\Delta_{n-N_k-3}$ , além disso, como  $f_c^{N_k}(0) \in C_2^-$ , então  $f_c^{N_k+2}(0) \in A$ , logo  $f_c^{N_k+3}(0) \in [f_c(0), \alpha]$ . Dessa forma, se  $S^* \subset J_0$  para algum  $J_0 \in \mathcal{J}$ , como  $S^* := f_c^3(S') \subset [\check{\alpha}^{(2)}, -\alpha]$  então  $J_0 \neq C_2^+$  e pela observação anterior a respeito do ponto  $f_c^{N_k+3}(0)$  temos que ele não pertence à  $\hat{J}_0$ , fazendo com que a componente de  $f_c^{-1}(g_{B(k)} \circ g_{D^-}(J_0))$  que contém  $S$  seja regular, chegando a uma contradição. ■

**Proposição 5.2.6.** *Seja  $S \in \text{Sin}(n)$  lateral de level  $k$  não estacionário tal que  $g_{B(k)}$  preserva (resp. inverte) a orientação, então:*

- *ou existe um intervalo  $S^* \in \text{Sin}(n - N_k)$  tal que  $S^+ := f_c(S)$  é igual a  $g_{B(k)}(S^*)$ ;*
- *ou existe um natural  $n_0 \in [2, \text{ord}(J(k)) + 1]$  e um intervalo  $S^* \in \text{Sin}(n - N_k - n_0)$  tal que  $S^+ = g_{B(k)} \circ g_{J_0}(S^*)$ , onde  $J_0$  é o intervalo regular de ordem  $n_0$  cujo ponto de fronteira à esquerda (resp. à direita) está imediatamente à direita (resp. à esquerda) de  $f_c^{N_k}(0)$  em  $\Delta_{n_0}$ .*

*Demonstração.* Assumiremos que  $g_{B(k)}$  preserva a orientação, o caso contrário é análogo. Como o level  $k$  é não estacionário, sabemos que  $J(k) \neq C_2^\pm$ . Além disso,  $S \subset \check{A}(k) \setminus \check{A}(k+1)$ , e portanto  $S^+ \subset \check{B}(k) \setminus \check{B}(k+1)$ . Como  $f_c^{N_k-1}(B(k+1)) = J(k)$  e  $g_{B(k)}$  preserva orientação, temos que  $S' := f_c^{N_k}(S)$  está contido na componente à direita de  $\check{A} \setminus \check{J}(k)$ . Mais que isso,  $S'$  não pode estar em  $[-\alpha, -\check{\alpha}^{(3)}] = D^-$ , pois senão, como  $J(k) \neq C_2^-$ , teríamos que  $f^{-1}(g_{B(k)}(D^-))$  seria regular contendo  $S$ . Concluimos então que  $S' \subset A \setminus \check{J}(k)$  com pontos de fronteira em  $\Delta_{n-N_k}$ .

Se  $S'$  é  $(n - N_k)$ -singular, então fazemos  $S' = S^*$  e temos o primeiro caso. Assumimos, agora, que  $S'$  não é  $(n - N_k)$ -singular e, portanto, está contido em um intervalo  $J_0 \in \mathcal{J}$  que é regular de ordem  $\leq n - N_k$  que, por nossas restrições, é menor ou igual à  $\text{ord}(J(k)) + 2$ . Perceba que pode haver mais de um intervalo nessas condições, por isso escolheremos  $J_0$  sendo o menor deles, isto é, aquele de maior ordem a qual denotaremos como  $n_0$  e faremos  $S^* := f_c^{n_0}(S')$ .

Afirmamos que  $S^*$  é  $(n - N_k - n_0)$ -singular. De fato, os pontos de fronteira de  $S^*$  estão em  $\Delta_{n-N_k-n_0}$ . Suponha que existe  $J_1 \in \mathcal{J}$  tal que  $S^* \subset J_1$ , teríamos então que  $g_{J_0}(J_1)$  seria regular, de ordem maior que a ordem de  $J_0$ , contendo  $S'$ , o que seria uma contradição com a nossa escolha para  $J_0$ .

Por fim, para a afirmação sobre os pontos de fronteira de  $J_0$ , é preciso que  $f_c^{N_k}(0)$  pertença a  $\hat{J}_0$  para que  $f_c^{-1}(g_{B(k)}(J_0))$  não seja regular contendo  $S$ . Além disso,  $f_c^{N_k}(0)$  não pode pertencer a  $J_0$ , pois neste caso teríamos que  $J(k)$  estaria estritamente contido em  $J_0$  tendo ordem menor que a ordem de  $J_0$  contrariando o fato dos elementos de  $\mathcal{J}$  serem maximais. Concluimos então que  $f_c^{N_k}(0)$  pertence à componente à esquerda de  $\hat{J}_0 \setminus J_0$  e portanto o ponto de fronteira de  $J_0$  está imediatamente à direita de  $f_c^{N_k}(0)$ . ■

Precisamos, agora, limitar o comprimento destes intervalos. Para  $1 \leq k \leq K$ , denotamos como  $E_\ell(n, k)$  a soma do comprimento dos intervalos  $n$ -singulares laterais de level  $k$ .

**Proposição 5.2.7.** *Para  $k$  level estacionário, temos que  $E_\ell(n, k)$  satisfaz*

$$E_\ell(n, k) \leq C 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_k - 3).$$

*Demonstração.* Como  $S^+ = f_c(S)$ , temos que  $|S| \leq C|S^+|^{1/2}$ . Pela Prop. 5.2.5,  $S^+ = g_{B(k)} \circ g_{D^+}(S^*)$  para  $S^* \in \text{Sin}(n - N_k - 3)$ . A derivada  $|g_{D^+}(x)| \leq C$  para todo  $x \in A$ , e pela inequação (5.1) da Prop. 5.2.2, temos a limitação de  $|g'_{B(k)}(x)|$ , concluimos que para todo  $x \in A$ :

$$|(g_{B(k)} \circ g_{D^+})'(x)| \leq C2^{-(N_k+M)} e^{CM^{-1}N_k}.$$

Portanto:

$$|S| \leq C2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} |S^*|.$$

■

**Proposição 5.2.8.** *Para  $k$  level não estacionário, temos que  $E_\ell(n, k)$  satisfaz*

$$E_\ell(n, k) \leq C \text{ord}(J(k)) 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_{k+1} - 1).$$

*Se  $J(k)$  é simples ( $\text{ord}(J(k)) < M$ ), temos uma melhor estimativa:*

$$E_\ell(n, k) \leq C2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_{k+1} - 1).$$

*Demonstração.* Da mesma forma que nas provas das Prop. 5.2.7, podemos deduzir que

$$|S| \leq C2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} |S'|,$$

para  $S' = f_c^{N_k}(S)$ . Neste caso, temos que ou  $S' \in \text{Sin}(n - N_k)$ , ou existe um natural  $n_0 \in [2, \text{ord}(J(k)) + 1]$  e um intervalo  $S^* \in \text{Sin}(n - N_k - n_0)$  tal que  $S^+ = g_{B(k)} \circ g_{J_0}(S^*)$ , onde  $J_0$  é o intervalo regular de ordem  $n_0$ . Como a ordem de  $J_0$  está limitada, podemos assumir  $|Dg_{J_0}| \leq C$ , e teremos

$$|S| \leq C2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} |S^*|.$$

Lembrando que para cada  $n_0$ , existe uma única opção para o intervalo  $J_0$ , e pelo fato que  $E(n)$  é uma sequência não crescente, teremos o primeiro resultado.

O segundo, vem do fato mostrado na Prop. 5.2.6 de que  $J_0$  é o intervalo com pontos de fronteira imediatamente ao lado de  $f_c^{N_k}(0)$  em  $\Delta_{n_0}$ , o que quando  $J(k)$  é simples só nos dá uma única opção para  $(J_0, n_0)$ . ■

Com isso, podemos limitar o comprimento de todos os tipos de intervalos  $n$ -singulares.

**Proposição 5.2.9.**

1. Para  $2 \leq n \leq M - 2$ , temos que para todo  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$

$$E(n) = |[\tilde{\alpha}^{(n)}, -\tilde{\alpha}^{(n)}]| \leq 4 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$$

2. Assuma  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  parâmetro fortemente regular até o level  $K$ . Seja  $\theta \in (0, 1/2)$ . Se  $M \leq M_0(\theta)$  então para todo  $M - 2 < n < N_{K+1} + 3$  vale que

$$E(n) \leq 2^{-\theta n}$$

*Demonstração.* 1. Para  $2 \leq n \leq M - 2$ , o único intervalo  $n$ -singular é  $[\tilde{\alpha}^{(n)}, -\tilde{\alpha}^{(n)}]$ . Para  $c = -2$ , pela Observação 4.2.1, temos que seu tamanho é  $4 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ . Pela Prop. 4.2.1 este tamanho cresce à medida que nos aproximamos do parâmetro  $c = -2$ , assim temos o resultado.

2. Para  $2 \leq n \leq M - 2$ , temos pelo item (1) que

$$E(n) \leq 4 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \leq \frac{4\pi}{3 \cdot 2^n} \leq 3 \cdot 2^{-n/2}.$$

Para  $M - 2 < n \leq 2M - 9$ , como  $E(n)$  é decrescente, temos que

$$E(n) \leq E(M - 2) \leq \frac{16\pi}{3} 2^{-M} \leq 2^{\frac{9}{2}-M} \leq 2^{-n/2}.$$

Agora, assumindo  $n \geq 2M - 8$  e, substituindo  $K$  por um inteiro menor se necessário, podemos assumir  $N_K + 3 \leq n \leq N_{K+1} + 2$ , avaliaremos cada tipo de intervalo  $n$ -singular por vez.

Para os intervalos  $n$ -singulares centrais, temos pelo Corolário 5.2.1 que  $E_c(n) \leq 2^{-1/2(N_K+M)} 2^{CM^{-1}N_K}$ . Teremos

$$\begin{aligned} 2^{(CM^{-1}-1/2)N_K-M/2} &\leq 2^{-2} 2^{-\theta(N_{K+1}+2)} && \iff \\ (CM^{-1} - 1/2)N_K - M/2 &\leq -\theta(N_{K+1} + 2) - 2 && \iff \\ \theta(N_{K+1} - N_K) &\leq (1/2 - \theta - CM^{-1})N_K + M/2 - 2 - 2\theta. \end{aligned}$$

Temos duas opções, se  $J(K)$  é simples, então  $(N_{K+1} - N_K) \leq M - 2$ , e para  $M$  suficientemente grande  $\theta(N_{K+1} - N_K) \leq M/2 - 2 - 2\theta$ . Se  $J(K)$  é não simples, como o parâmetro é fortemente regular até o level  $K$ , temos  $(N_{K+1} - N_K) \leq 2^{\sqrt{M}} N_K \leq (1/2 - \theta - CM^{-1})N_K$  para  $M$  suficientemente grande. De ambas as formas, a inequação será válida e concluímos pela hipótese imposta à  $n$ :

$$E_c(n) \leq \frac{1}{4} 2^{-\theta(N_{K+1}+2)} \leq \frac{1}{4} 2^{-\theta n}.$$

Em seguida, para os intervalos  $n$ -singulares periféricos, pela proposição 5.2.4 e utilizando a hipótese de indução para  $E(n - M - 1)$ , temos

$$E_p(n) \leq C 2^{-M} E(n - M - 1) \leq C 2^{-M} 2^{-\theta(n-M-1)},$$

Como  $\theta \in (0, 1/2)$ , podemos ver que

$$2^{-\theta n} 2^{\theta(M+1)-M} \cdot C \leq 2^{-\theta n} \cdot 2^{-M/2} \cdot C,$$

e portanto para  $M$  suficientemente grande teremos  $E_p(n) \leq \frac{1}{4} 2^{-\theta n}$ .

Por fim, para os intervalos  $n$ -singulares laterais, comparando as proposições 5.2.7 e 5.2.8, observamos que a limitação para  $E_\ell(n, k)$  é mais grosseira para o caso em que o level  $k$

é não estacionário e, portanto, podemos usar esta limitação para todos os casos. Utilizaremos a hipótese de indução para  $E(n - N_{k+1} - 1)$  e teremos dois casos. Primeiro quando  $J(k)$  é não simples, i.e.,  $\text{ord}(J(k)) > M$ , teremos pela prop. 5.2.8:

$$\begin{aligned} E_\ell(n, k) &\leq C \text{ord}(J(k)) 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_{k+1} - 1) \\ &\leq C \text{ord}(J(k)) 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} 2^{-\theta(n-N_{k+1}-1)}. \end{aligned}$$

Perceba que  $N_{k+1} = N_k + \text{ord}(J(k))$  e, como o parâmetro  $c$  é fortemente regular até o level  $K$ , temos  $\text{ord}(J(k)) \leq 2^{-\sqrt{M}} N_k$ . Reorganizando a expressão temos:

$$\begin{aligned} E_\ell(n, k) &\leq C 2^{-\theta n} 2^{\theta-M/2} 2^{\theta \text{ord}(J(k))} 2^{(\theta+CM^{-1}-1/2)N_k} \text{ord}(J(k)) \\ &\leq C 2^{-\theta n} 2^{\theta-M/2} 2^{(\theta+CM^{-1}+2^{-\sqrt{M}}-1/2)N_k} 2^{-\sqrt{M}} N_k. \end{aligned}$$

Para  $M$  suficientemente grande, temos  $(\theta + CM^{-1} + 2^{-\sqrt{M}} - 1/2) < 0$ , pois  $\theta \in (0, 1/2)$ . Com isso, teremos para algum  $C > 0$ :

$$E_\ell(n, k) \leq C 2^{-\theta n} 2^{\theta-M/2} 2^{-C^{-1}N_k} 2^{-\sqrt{M}} N_k.$$

Portanto, basta notar que a série  $\sum_k 2^{-C^{-1}N_k} 2^{-\sqrt{M}} N_k$  converge, teremos:

$$\sum_{\substack{1 \leq k < K \\ \text{ord}(J(k)) > M}} E_\ell(n, k) \leq \frac{1}{4} 2^{-\theta n}$$

Agora, se  $J(K)$  é simples ( $\text{ord}(J(k)) < M$ ), pela Prop. 5.2.8 temos para  $M$  suficientemente grande:

$$\begin{aligned} E_\ell(n, k) &\leq C 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_{k+1} - 1) \\ &\leq C 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} 2^{-\theta(n-N_{k+1}-1)} \\ &\leq C 2^{-\theta n} 2^{\theta-M/2} 2^{\text{ord}(J(k))} 2^{(\theta+CM^{-1}-1/2)N_k} \\ &\leq C 2^{-\theta n} 2^{\theta-M/2} 2^{(\theta+CM^{-1}+2^{-\sqrt{M}}-1/2)N_k} \\ &\leq C 2^{-\theta n} 2^{\theta-M/2} 2^{-C^{-1}N_k}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\sum_{\substack{1 \leq k < K \\ \text{ord}(J(k)) < M}} E_\ell(n, k) \leq \frac{1}{4} 2^{-\theta n}$$

■

**Corolário 5.2.2.** Para  $M$  suficientemente grande, parâmetros fortemente regulares em  $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$  são regulares.

# Capítulo 6

## Espaço de Parâmetros

### 6.1 Sinopse

Agora temos uma base quase completa para a prova de uma das afirmações do Teorema de Jakobson. O objetivo desta seção é provar que

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\text{Leb}(\Lambda \cap [-2, -2 + c])}{\text{Leb}([-2, -2 + c])} = 1,$$

isto é, o parâmetro  $c = -2$  é ponto de densidade do conjunto de parâmetros estocásticos.

### 6.2 Entendendo o Espaço de Parâmetros

Começamos lembrando as características do conjunto  $\Delta_n(c) = f_c^{-n}(\{\pm\alpha(c)\})$  apresentado na Definição 5.2.1, para cada parâmetro  $c$  este conjunto tem como elementos os pontos que serão denotados como  $\delta(c)$ , pré-imagens do ponto fixo  $\alpha(c)$ . Relembramos também a sequência  $(c^{(m)})_m$  apresentada na introdução da seção 4, em que  $c^{(m)} = \alpha^{(m-1)}(c^{(m)})$ .

Faremos uma partição do espaço de parâmetros  $c \in [-2, c^{(2)}]$  definindo o conjunto, para  $n > 1$ :

$$\tilde{\Delta}_n = \{c \in [-2, c^{(2)}] \mid f_c^n(0) = \pm\alpha(c)\}.$$

Para cada natural  $n$ ,  $\tilde{\Delta}_n$  é um conjunto finito  $\tilde{\Delta}_n \subset \tilde{\Delta}_{n+1}$ . Além disso, pela definição da sequência  $(c^{(m)})_m$ , temos que:

$$\tilde{\Delta}_2 = \{c^{(2)}\}, \quad \tilde{\Delta}_3 = \{c^{(2)}, c^{(3)}\},$$

e os pontos  $c^{(n)}$ ,  $c^{(n-1)}$  são, respectivamente, os dois menores pontos em  $\tilde{\Delta}_n$  e, portanto, o intervalo  $(c^{(n)}, c^{(n-1)})$  é uma das componentes conexas de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_n$ . Agora, para todas as componentes limitadas de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_n$ , denotadas  $U$ , faremos uma interpretação da relação entre os parâmetros  $c \in U$ .

**Proposição 6.2.1.** *Seja  $U$  uma componente conexa limitada de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_n$  e  $c_0$  um parâmetro arbitrário em  $U$ , temos para  $n > 2$  que:*

1. Existe uma única função contínua  $(\delta, c) \mapsto \delta(c)$  com domínio  $(\delta, c) : \Delta_n(c_0) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz:  $\delta(c_0) = \delta$ , para todo  $\delta \in \Delta_n(c_0)$  e;  $f_c(\delta(c)) = \delta_1(c)$  sempre que  $f_{c_0}(\delta) = \delta_1$ .
2. Para cada  $\delta \in \Delta_n(c_0)$  fixado, a função  $c \mapsto \delta(c)$  é analítica em  $U$  e se estende continuamente para  $cl(U)$ .
3. Para todo  $c \in U$ ,  $\delta \in \Delta_n(c_0)$ ,  $\delta(c)$  é diferente de 0. Além disso, se  $\delta \in \Delta_{n-1}(c_0)$ ,  $\delta(c)$  é diferente de  $f_c(0) = c$ .
4. Para cada  $c \in U$  fixado, a função  $\delta \mapsto \delta(c)$  é injetiva e sua imagem é  $\Delta_n(c)$ .
5. Seja  $J = [\gamma^-, \gamma^+]$  um intervalo regular para  $f_{c_0}$  de ordem  $k < n$ . Então, para todo  $c \in U$ ,  $[\gamma^-(c), \gamma^+(c)]$  é um intervalo regular para  $f_c$  de mesma ordem  $k$ . Diremos que estes intervalos são correspondentes pela função.

*Demonstração.* 1. Fixados  $c_0 \in U$  e um natural  $n$ , faremos uma construção indutiva das funções  $(\delta, c) \mapsto \delta(c)$  com  $\delta \in \Delta_k(c_0)$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

- Para  $k=0$ ,  $\Delta_0(c_0) = \{\pm\alpha(c_0)\}$ . Definimos de forma intuitiva,  $(\alpha(c_0), c) \mapsto \alpha(c)$  e  $(-\alpha(c_0), c) \mapsto -\alpha(c)$ . Esta satisfaz as propriedades requeridas.
- Suponha que a função  $(\delta, c) \mapsto \delta(c)$  está definida para  $\Delta_k(c_0)$ , com  $k < n$ . Seja  $\delta \in \Delta_{k+1}(c_0) \subset \Delta_n(c_0)$ , faça  $\delta_1 := \delta^2 + c_0 = f_{c_0}(\delta) \in \Delta_k(c_0)$ , temos  $\delta_1(c_0) \leq f_{c_0}(0)$ .  $U$  é aberto e conexo, e seus pontos de fronteira são consecutivos em  $\tilde{\Delta}_n$ , portanto não intersecta  $k+1(c_0)$ . Portanto,  $\delta_1(c) > f_c(0) = c$  para todo  $c \in U$ , e então podemos definir  $\delta(c)$  unicamente tal que:

$$\delta(c_0) = \delta, \quad \delta(c)^2 = \delta_1(c) - f_c(0).$$

2. Pela forma como a função é construída, podemos perceber, utilizando o mesmo argumento que para as funções  $\alpha^{(n)}(c)$  apresentado na seção 4, que as funções  $\delta(c)$  são analíticas e se estendem continuamente a  $cl(U)$  assim como  $\alpha^{(n)}(c)$  se estende a  $(c^{(n+1)}, c^{(n)})$ .
3. Assim como no argumento utilizado na afirmação (1), dado  $\delta \in \Delta_n(c_0)$ , não pode existir  $c \in U$  tal que  $\delta(c) = 0$ , pois nesse caso teríamos que  $c \in \tilde{\Delta}_n$ , contradizendo o fato de  $U$  ser uma componente conexa de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_n$ . Além disso, se  $\delta \in \Delta_{n-1}(c_0)$ , não podemos ter  $\delta(c) = c$ , pois senão também teríamos  $c \in \tilde{\Delta}_n$  chegando à mesma contradição.
4. Fixado  $c \in U$ , se a função  $\delta \mapsto \delta(c)$  com domínio  $\Delta_n(c_0)$  não for injetiva, então existe um natural  $k$ , sendo este o menor natural possível tal que a restrição desta função ao conjunto  $\Delta_k(c_0)$  também não é injetiva. Dados  $\delta \neq \delta' \in \Delta_k(c_0)$ , tais que  $\delta(c) = \delta'(c)$ , temos, pela minimalidade de  $k$ , que para  $k+1$  a função será injetora e portanto  $f_{c_0}(\delta) = f_{c_0}(\delta')$ . Concluímos assim que  $\delta = -\delta'$  e portanto,  $\delta(c) = -\delta(c)$ , isto é,  $\delta(c) = 0$ , contradizendo a afirmação feita no item (3).

Pela forma como a função foi definida, para todo  $\delta \in \Delta_n(c_0)$ , o ponto  $\delta(c)$  pertence a  $\Delta_n(c)$  para todo  $c \in U$ , como essa função é injetiva a cardinalidade de  $\Delta_n(c)$  é no mínimo igual à de  $\Delta_n(c_0)$ . No entanto, como o ponto  $c_0$  é escolhido de forma arbitrária em  $U$ , temos que esta cardinalidade é constante no intervalo  $U$ . Portanto, a imagem de  $\delta \mapsto \delta(c)$  é  $\Delta_n(c)$ .

5. Seja  $\hat{J} = (\hat{\gamma}^-, \hat{\gamma}^+)$  o intervalo corresponde a  $J$ , os pontos  $\hat{\gamma}^\pm$  pertencem a  $\Delta_{k+1}(c_0) \subset \Delta_n(c_0)$ . Dessa forma, como  $J$  é  $k$ -regular, para qualquer  $0 \leq j < k$  os intervalos  $f_{c_0}^j(\hat{J})$  não contêm o ponto crítico. Pela afirmação (3), o mesmo ocorre para os intervalos  $f_c^j(\hat{\gamma}^-(c), \hat{\gamma}^+(c))$  para todo  $c \in U$ . Além disso, os pontos  $\hat{\gamma}^\pm(c), \gamma^\pm(c) \in \Delta_{k+1}(c)$ , concluímos assim que  $[\gamma^-(c), \gamma^+(c)]$  também é regular para  $f_c$  de mesma ordem  $k$  ■

Podemos agora entender a relação entre os parâmetros contido em um intervalo  $U$ . Seja  $M$  um natural grande o suficiente tal que vale o Corolário 5.2.2, e  $n \geq M$ , tomaremos  $U$  como uma componente de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_n$  contido em  $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$  e  $c_0 \in U$  um parâmetro arbitrário.

Suponha que existam inteiros  $M = N_1 < \dots < N_{K+1} \leq n$  e para cada  $1 \leq k \leq K$  o intervalo  $J(k) = [\gamma_k^-, \gamma_k^+] \in \mathcal{J}(c_0)$  de ordem  $N_{k+1} - N_k$  contém o ponto  $f_{c_0}^{N_k}(0)$  em seu interior. Pela proposição anterior, para todo  $c \in U$  o intervalo  $[\gamma_k^-(c), \gamma_k^+(c)] \in \mathcal{J}(c)$  é regular de mesma ordem e o ponto  $f_c^{N_k}(0)$  está em seu interior.

Se, além disso,  $c_0$  é fortemente regular até o level  $K$ , teremos que o mesmo será verdade para todo  $c \in U$ , uma vez que a ordem de todos os intervalos  $J(k)$  são iguais até  $K$ .

**Definição 6.2.1.** *Seja  $c_0 \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  parâmetro fortemente regular até o level  $K$ . Denotaremos a componente de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_{N_{K+1}}$  que contém  $c_0$  como  $U(K)$ . Todos os parâmetros  $c \in U(K)$  são fortemente regulares até o level  $K$ .*

Dado  $U(K)$ , pela afirmação (5) da proposição anterior, a sequência  $M = N_1 < \dots < N_{K+1}$  é a mesma para todos os parâmetros em  $U(K)$ . Para  $k \leq K$ , existe um único intervalo  $U(k)$  de parâmetros fortemente regulares até o level  $k$  que contenha  $U(K)$ , este sendo exatamente a componente de  $\mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_{N_{k+1}}$ . Precisamos, então, entender como um intervalo de parâmetros fortemente regulares  $U(K-1)$  se divide em intervalos da forma  $U(K)$  e intervalos “ruins” em que os parâmetros não são fortemente regulares até  $K$ .

Avaliaremos então o intervalo  $U(K-1)$ . Suponha que algum parâmetro  $c_0 \in U(K-1)$  é fortemente regular até o level  $K$ , teremos então que  $T_{c_0}^K(0) = f_{c_0}^{N_K}(0)$  pertence a algum intervalo regular denotado  $J(K) \in \mathcal{J}(c_0)$ . Pela suposição para  $c_0$ , a ordem  $\text{ord}(J(K))$  é sempre menor ou igual ao número  $N_K^\#$ , este sendo:

$$N_K^\# = \begin{cases} M - 2, & \text{se } N_K < 2^{\sqrt{M}}M \\ \lfloor 2^{-\sqrt{M}}(1 - 2^{-\sqrt{M}})(N_K - M) \rfloor, & \text{se } N_K \geq 2^{\sqrt{M}}M. \end{cases}$$

Fixado um parâmetro  $c_0 \in U(K-1)$ , consideramos a partição do intervalo  $A = [\alpha(c_0), -\alpha(c_0)]$  feita pelo conjunto  $\Delta_{N_K^\#} \cap A$  em intervalos  $N_K^\#$ -regulares pertencentes a  $\mathcal{J}(c_0)$  e  $N_K^\#$ -singulares. Denotaremos como:

$$\Delta(N_K^\#) = \Delta_{N_K^\#} \cap A = \{\alpha < \tilde{\alpha}^{(2)} < \dots < \tilde{\alpha}^{(M-2)} < \dots < -\tilde{\alpha}^{(M-2)} < \dots < -\tilde{\alpha}^{(2)} < -\alpha\}.$$

Pela Prop. 6.2.1, existe uma função contínua  $(\gamma, c) \mapsto \gamma(c)$  com domínio em  $\Delta(N_K^\#) \times U(K-1)$ , tal que para cada  $c \in U(K-1)$  os pontos  $\{\gamma(c), \gamma \in \Delta(N_K^\#)\}$  formam uma partição do conjunto  $A = [\alpha(c), -\alpha(c)]$  em intervalos em  $\mathcal{J}(c)$  de ordem  $\leq N_K^\#$  e intervalos  $N_K^\#$ -singulares.

Definimos o conjunto

$$\tilde{\Delta}(U(K-1)) = \{c \in U(K-1) \mid \exists \gamma \in \Delta(N_K^\#) \text{ tal que } f_c^{N_K^\#}(0) = \gamma(c)\}$$

de parâmetros em  $U(K-1)$  que definirão uma partição para este conjunto com a mesma ideia do conjunto  $\tilde{\Delta}_n$  apresentado anteriormente.

Utilizando a mesma ideia da afirmação (5) da Prop. 6.2.1, seja  $V$  uma componente de  $U(K-1) \setminus \tilde{\Delta}(U(K-1))$ . Quando  $c$  varia em  $V$ , o ponto  $f_c^{N_K^\#}(0)$  mantém-se no mesmo intervalo  $J^\#$  (regular ou singular) que são correspondentes pela função.  $V$  será um intervalo de parâmetros fortemente regulares até o level  $K$  ou não de acordo com a ordem do intervalo  $J^\#$ , teremos:

- Se  $J^\#$  é  $N_K^\#$ -singular,  $V$  é uma componente ruim de  $U(K-1) \setminus \tilde{\Delta}(U(K-1))$ . Nenhum parâmetro em  $V$  é fortemente regular até  $K$ .
- Se  $J^\#$  é um intervalo regular simples,  $V$  é um intervalo de parâmetros fortemente regulares até o level  $K$ , teremos  $N_{K+1} = N_K + \text{ord}(J^\#)$ .
- Se  $J^\#$  é regular não simples,  $V$  poderá ser de ambas as formas, dependendo apenas da ordem do intervalo  $J^\#$ , teremos que  $V$  será um intervalo de parâmetros fortemente regulares até  $K$  se, e somente se, essa ordem satisfizer

$$\text{ord}(J^\#)(1 - 2^{-\sqrt{M}}) \leq 2^{-\sqrt{M}}(N_K - M) - \sum_{\substack{1 \leq k < K \\ N_{k+1} - N_k > M}} (N_{k+1} - N_k).$$

Lembramos que a sequência  $N_k$  até o inteiro  $K$  é a mesma para todo  $c \in U(K-1)$ , e teremos também para  $c \in V$  que  $N_{K+1} = N_K + \text{ord}(J^\#)$ .

Com estas ideias entendidas, podemos então fazer uma clara relação do tamanho dos intervalos  $N_K^\#$ -singulares de um parâmetro  $c_0 \in U(K-1)$  com o tamanho dos intervalos  $V$  que serão ruins, mas para isso, precisamos entender o comportamento das funções que relacionam estes tamanhos.

### 6.2.1 Estimativas no Espaço de Parâmetros

**Proposição 6.2.2.** *Seja  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ , lembramos que  $B(1) = [\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)}]$  é o intervalo regular de ordem  $M-1$  contendo  $f_c(0)$  e  $C_n^\pm$  são os intervalos em  $\mathcal{J}(c)$  regulares simples.*

1. Para  $0 < n < M$ ,  $x \in \check{A}$ :

$$\left| \frac{\partial}{\partial c} \alpha^{(n)}(c) - \frac{1}{3} \right| \leq Cn4^{-n}; \quad \left| \frac{\partial}{\partial c} g_{B(1)}(x) - \frac{1}{3} \right| \leq CM4^{-M}.$$

2. Para  $2 \leq n \leq M-2$ ,  $x \in \check{A}$ :

$$\left| \frac{\partial}{\partial c} \tilde{\alpha}^{(n)}(c) \right| \leq C2^n; \quad \left| \frac{\partial}{\partial c} g_{C_n^\pm}(x) \right| \leq C2^n.$$

*Demonstração.* 1. Consideremos uma sequência  $\check{x}_0, \dots, \check{x}_{M-1}, \dots, x_n, \dots$  para  $f_c$  de forma que  $x_{n+1}^2 + c = x_n$  e  $x_{n+1} > 0$  para todo  $n$  com  $x_0 \in \check{A}$ .

Note que a afirmação é verdadeira para  $n = 0$ , supondo verdadeira para  $n$ , pela relação de recorrência temos

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial c} = \frac{1}{2x_{n+1}} \left( \frac{\partial x_n}{\partial c} - 1 \right). \quad (6.1)$$

E, portanto

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial c} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2x_{n+1}} \left( \frac{\partial x_n}{\partial c} + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1}} \right).$$

Pelas Proposições 4.2.1 e 4.2.1, temos que  $|x_n - 2| \approx 4^{-n}$  e supondo a inequação válida para  $n$ , temos  $\left( \frac{\partial x_n}{\partial c} + \frac{1}{3} \right) \leq Cn4^{-n}$ , concluímos:

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial c} + \frac{1}{3} \leq C(n+1)4^{-(n+1)}.$$

Para a primeira inequação faremos  $x_0 = -\alpha(c)$  e teremos  $x_n = -\alpha^{(n)}(c)$ , para a segunda faremos  $x_0 \in \check{A}$  qualquer e teremos  $-x_{m-1} \in B(1)$ . O que conclui a prova.

2. Utilizaremos a mesma ideia que na afirmação (1), fazendo a sequência  $x_0, \dots, x_n, \dots, x_{M-2}$  temos a mesma relação que na equação (6.1).

Para a primeira inequação fazemos  $x_0 = -\alpha(c)$ , teremos  $x_j = \alpha^{(j)}$  para  $1 \leq j \leq n$  e  $x_{n+1} = \tilde{\alpha}^{(n+1)}$ , temos pela afirmação (1) que  $\frac{\partial x_j}{\partial c} \approx \frac{1}{3}$ .

Para a segunda inequação faremos  $x_0 \in \check{A}$  qualquer,  $x_j \in [-\alpha^{(j)}, -\alpha^{(j+1)}]$  para  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $x_n \in [\alpha^{(n+1)}, \alpha^{(n)}]$ , e  $x_{n+1} \in C_{n+1}^\pm$ . Pela prova da afirmação (1), temos que  $\frac{\partial x_n}{\partial c} \approx \frac{1}{3}$ .

Em ambos os casos, pela Prop. 4.2.1 temos  $|\tilde{\alpha}^{(n)}| \approx 2^{-n}$  para  $2 \leq n \leq M-2$ . e portanto  $|x_{n+1}| \approx 2^{-(n+1)}$ . Concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x_{n+1}}{\partial c} \right| &= \left| \frac{1}{2x_{n+1}} \left( \frac{\partial x_n}{\partial c} - 1 \right) \right| \\ &\leq C2^n(2/3) \leq C2^{n+1}. \end{aligned}$$

■

Para a inversa associada a um intervalo regular  $J$  qualquer, temos uma estimativa mais grosseira.

**Proposição 6.2.3.** *Seja  $J$  um intervalo regular. A inversa  $g_J$  associada a  $J$  satisfaz para todo  $x \in \check{A}$ :*

$$\left| \frac{\partial}{\partial c} g_J(x) \right| \leq C4^{\text{ord}(J)}.$$

*Demonstração.* Seja  $n := \text{ord}(J)$ ,  $x \in \check{A}$ , tomaremos a derivada com respeito ao parâmetro  $c$  da identidade  $f_c^n \circ g_J(x) = x$ , pela regra da cadeia, teremos:

$$\left( \frac{\partial(f_c^n)}{\partial x} \circ g_J(x) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial c} g_J(x) + \frac{\partial(f_c^n)}{\partial c} \circ g_J(x) = 0.$$

Por 4.3.1, teremos que  $\left| \frac{\partial(f_c^n)}{\partial x} \right| \geq C^{-1}|J|^{-1} \geq C^{-1}$  em  $\check{J}$ . Além disso, o mapa  $(x, c) \mapsto (f_c(x), c)$  tem norma  $\leq 4$  em  $[-2, 2] \times [-2, 0]$  e portanto  $\left| \frac{\partial(f_c^n)}{\partial c} \right| \leq 4^n$  em  $\check{J}$ . O que conclui a prova. ■

Agora podemos estimar bem os pontos em  $\tilde{\Delta}(U(K-1))$ .

**Proposição 6.2.4.** *Seja  $U(K-1) \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  um intervalo de parâmetros fortemente regulares até o level  $K-1$ . Para todo parâmetro  $c \in U(K-1)$  vale que para qualquer intervalo regular  $J \in \mathcal{J}(c)$  de ordem  $\leq N_K^\#$  os pontos de fronteira  $\gamma^\pm$  do intervalo  $g_{B(K)}(J)$  satisfazem:*

$$\left| \frac{\partial}{\partial c} \gamma^\pm(c) - \frac{1}{3} \right| \leq C2^{-M}.$$

*Demonstração.* Pela forma dos intervalos regulares teremos  $g_{B(K)}(J)$  regular de ordem  $\text{ord}(J) + N_K$ , com pontos de fronteira  $\gamma^\pm(c) = g_{B(K)} \circ g_J(\pm\alpha(c))$ , denotaremos  $g_{B(K)} \circ g_J$  como  $g_{B(K+1)}$  e teremos

$$\frac{\partial}{\partial c} [g_{B(K+1)}(\pm\alpha(c))] = \frac{\partial g_{B(K+1)}}{\partial c}(\pm\alpha(c)) \pm \frac{\partial g_{B(K+1)}}{\partial x}(\pm\alpha(c)) \frac{\partial \alpha}{\partial c}$$

Assim, teremos que  $\frac{\partial \alpha}{\partial c}$  é limitada (ver introdução da seção 4) e pela limitação imposta à ordem do intervalo  $J$ , podemos utilizar a proposição 4.3.1 e teremos:

$$\left| \frac{\partial g_{B(K+1)}}{\partial x}(\pm\alpha) \right| \leq C2^{-(N_K + \text{ord}(J) + M)} 2^{CM^{-1}(N_K + \text{ord}(J))}.$$

Agora, precisamos estimar  $\frac{\partial g_{B(K+1)}}{\partial c}$ , faremos isto utilizando indução em  $k$ . A relação de recorrência é a seguinte:

$$\frac{\partial g_{B(k+1)}}{\partial c} = \frac{\partial g_{B(k)}}{\partial c} \circ g_{J(k)} + \frac{\partial g_{B(k)}}{\partial x} \circ g_{J(k)} \cdot \frac{\partial g_{J(k)}}{\partial c}.$$

onde  $J(k)$  é o intervalo regular em  $A$  contendo  $f_c^{N_k}(0)$ . Pela Prop. 4.3.1, temos:

$$\left| \frac{\partial g_{B(k)}}{\partial x} \right| \leq 2^{-(N_k + M)} 2^{CM^{-1}N_k}.$$

Para  $J(k)$  simples temos sua limitação pela Prop. 6.2.2 parte (2). Para não simples, temos as limitações da Prop. 6.2.3 e o fato de que  $\text{ord}(J(k)) \leq 2^{1-\sqrt{M}}N_k$ , pois  $c$  é fortemente regular até  $K-1$ . De qualquer forma, teremos:

$$\left| \frac{\partial g_{B(k)}}{\partial x} \circ g_{J(k)} \cdot \frac{\partial g_{J(k)}}{\partial c} \right| \leq C2^{-N_k(1-CM^{-1})}.$$

Utilizando estes resultados na relação de recorrência juntamente com a limitação para  $\frac{\partial g_{B(1)}}{\partial c}$  da Prop. 6.2.2, temos o resultado. ■

## 6.2.2 Medidas no Espaço de Parâmetros

Agora, temos a base completa para entender as medidas no espaço de parâmetros e relacioná-las aos parâmetros fortemente regulares.

**Proposição 6.2.5.** *Sejam  $U(K - 1) = (c^-, c^+)$  um intervalo de parâmetros regulares até o level  $K - 1$  contido em  $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$ ,  $c_0 \in U$  qualquer, e  $B(K) = (\gamma^-, \gamma^+)$  o intervalo regular de ordem  $N_K - 1$  que contém o valor crítico  $f_{c_0}(0)$ . Seja  $N_K^\#$  assim como definido na subseção anterior e  $\mathcal{J}(c_0)$  é o conjunto de intervalos regulares (para  $f_{c_0}$ ) de ordem positiva contidos em  $A$  que são maximais com esta propriedade. Teremos:*

1. Vale que  $\gamma^-(c^-) = f_{c^-}(0)$  e  $\gamma^+(c^+) = f_{c^+}(0)$ ;
2. Seja  $J \in \mathcal{J}(c_0)$  um intervalo regular de ordem  $\leq N_K^\#$  e  $g_{B(K)}(J) = [\gamma_J^-, \gamma_J^+]$ . Então existe um intervalo  $[c_J^-, c_J^+] \subset U(K - 1)$ , que é ou um candidato ou de fato um intervalo de parâmetros fort. regulares até  $K$ , tal que o valor crítico  $f_c(0)$  satisfaz:

$$\begin{array}{ll} f_c(0) < \gamma_J^-(c) & \text{para } c^- \leq c < c_J^-, \\ f_c(0) = \gamma_J^-(c) & \text{para } c = c_J^-, \\ \gamma_J^-(c) < f_c(0) < \gamma_J^+(c) & \text{para } c_J^- < c < c_J^+, \\ f_c(0) = \gamma_J^+(c) & \text{para } c = c_J^+, \\ f_c(0) > \gamma_J^+(c) & \text{para } c^+ \leq c > c_J^+. \end{array}$$

*Demonstração.* Faremos por indução em  $K$ . Para  $K = 1$ , temos por definição  $U(0) = (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  e  $B(1) = [\alpha^{(M-1)}, \alpha^{(M-2)}]$ , pela forma como a sequência  $(c^{(m)})_m$  foi definida na seção 4, temos  $c^{(M)} = \alpha^{(M-1)}(c^{(M)})$  e  $c^{(M-1)} = \alpha^{(M-2)}(c^{(M-1)})$ , e para todo  $c \in U(0)$ ,  $f_c(0) \in (\alpha^{(M-1)}(c), \alpha^{(M-2)}(c))$  como queríamos.

Assuma agora que  $K \geq 1$  e que  $U(K - 1) = [c^-, c^+]$  satisfaz a afirmação (1) para  $B(K) = [\gamma^-, \gamma^+]$ . Seja  $c_0 \in U(K - 1)$ , tome  $J \in \mathcal{J}(c_0)$  de ordem  $\leq N_K^\#$  e  $g_{B(K)}(J) = [\gamma_J^-, \gamma_J^+]$ . Temos pela Prop. 6.2.4 que  $\left| \frac{\partial \gamma^+(c)}{\partial c} - \frac{1}{3} \right| \leq C2^{-M}$ , logo para  $M$  suficientemente grande tal que esta derivada seja positiva, garantimos a existência de  $c_J^-, c_J^+$  com as propriedades da parte (2) da afirmação.

Pelo fato de  $J$  ser um intervalo regular, garantimos que  $[c_J^-, c_J^+]$  é de fato ou candidato, ou um intervalo de parâmetros fortemente regulares até  $K$ . Por fim, pela forma como a função é definida na Prop. 6.2.1 garantimos a parte (1) para  $K$ . ■

Para entender como o intervalo  $U(K - 1) = [c^-, c^+]$  definido como na Prop.6.2.5 se divide em intervalos de parâmetros fortemente regulares até  $K$  e intervalos "ruins", vamos estender a ideia desta Prop. a todos os pontos em  $\Delta_n(c_0)$ , para  $c_0 \in U(K = 1)$  um parâmetro qualquer e  $n$  um natural em  $[2, N_K^\#]$ . Sejam

$$\gamma_0^- = \alpha < \gamma_0^+ = \tilde{\alpha}^{(2)} \leq \gamma_1^- < \gamma_1^+ \leq \dots \leq \gamma_r^- = -\tilde{\alpha}^{(2)} < \gamma_r^+ = -\alpha$$

os pontos em  $\Delta_n$  tais que para  $i \in [0, r]$ , os intervalos  $[\gamma_i^-, \gamma_i^+]$  são exatamente os regulares em  $\mathcal{J}(c_0)$  de ordem  $\leq n$ . Além disto, teremos que ou  $\gamma_i^+ = \gamma_{i+1}^-$  e neste caso os intervalos regulares

são adjacentes, ou, se são diferentes, o intervalo  $[\gamma_i^+, \gamma_{i+1}^-]$  é a união de intervalos  $n$ -singulares consecutivos.

Assuma que  $g_{B(K)}$  preserve a orientação para  $c_0$  (o caso será análogo para a inversão da orientação). Pela Prop. 6.2.5, existem parâmetros

$$c^- = c_0^- < c_0^+ \leq c_1^- < c_1^+ \leq \dots \leq c_r^- < c_r^+ = c^+$$

em  $U(K-1)$  tais que para todo  $c \in U(K-1)$ ,  $0 \leq i \leq r$ :

$$\begin{aligned} f_c^{N_K}(0) = \gamma_i^\pm(c) &\iff c = c_i^\pm \\ f_c^{N_K}(0) > \gamma_i^\pm(c) &\iff c > c_i^\pm \\ f_c^{N_K}(0) < \gamma_i^\pm(c) &\iff c < c_i^\pm. \end{aligned}$$

Precisamos, portanto, entender o tamanho dos intervalos  $(c_i^+, c_{i+1}^-)$ , nos quais os parâmetros possuem o ponto  $f_c^{N_K}(0)$  em um intervalo  $n$ -singular.

**Lema 6.2.1.** *O tamanho dos intervalos  $(c_i^+, c_{i+1}^-)$  é limitado por:*

$$C^{-1} \max_{c \in [c_i^+, c_{i+1}^-]} (\gamma_{i+1}^-(c) - \gamma_i^+(c)) \leq \frac{c_{i+1}^- - c_i^+}{c^+ - c^-} \leq C \min_{c \in [c_i^+, c_{i+1}^-]} (\gamma_{i+1}^-(c) - \gamma_i^+(c)).$$

*Demonstração.* Pela Prop. 6.2.4 os pontos de fronteira  $\gamma^\pm(c)$  de  $B(K)$  satisfazem, para  $M$  suficientemente grande,  $1/4 \leq \partial\gamma^\pm(c)/\partial c \leq 1/2$  para  $c \in U(K-1)$ . Logo, para qualquer  $c^* \in U(K-1)$ , vale que:

$$\begin{aligned} c^+ - c^- &= \gamma^+(c^+) - \gamma^-(c^-) \\ &= (\gamma^+(c^+) - \gamma^+(c^*)) + (\gamma^+(c^*) - \gamma^-(c^*)) + (\gamma^-(c^*) - \gamma^-(c^-)) \\ &\leq \frac{1}{2}(c^+ - c^-) + (\gamma^+(c^*) - \gamma^-(c^*)). \end{aligned}$$

Obtemos  $c^+ - c^- \leq 2(\gamma^+ - \gamma^-)(c^*)$  e, analogamente, temos também  $c^+ - c^- \geq 2(\gamma^+ - \gamma^-)(c^*)$ . Da mesma forma, obtemos para qualquer  $c^* \in U(K-1)$ :

$$\frac{4}{3}(g_{B(K)} \circ \gamma_{i+1}^- - g_{B(K)} \circ \gamma_i^+)(c^*) \leq c_{i+1}^- - c_i^+ \leq 2(g_{B(K)} \circ \gamma_{i+1}^- - g_{B(K)} \circ \gamma_i^+)(c^*).$$

A inequação do Lema resulta então da propriedade de distorção limitada de  $g_{B(K)}$  (ver Seção 2.4). ■

Com isso, nos falta limitar a soma do tamanho de todos os intervalos do tipo  $(c_i^+, c_{i+1}^-)$ . Para isso, faremos uma demonstração análoga à Prop. 5.2.9 com algumas mudanças.

Sejam  $U \subset (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  um intervalo de parâmetros fortemente regulares até o level  $K \geq 1$ , e  $n$  um natural tal que  $M-2 < n < N_{K+1} + 3$ .

Seja  $S(c_0) = (\gamma^-(c_0), \gamma^+(c_0))$  um intervalo  $n$ -singular para  $f_{c_0}$ , para algum  $c_0 \in U$ . Temos, então que  $S(c) = (\gamma^-(c), \gamma^+(c))$  é  $n$ -singular para todo  $c \in U$ , como já visto anteriormente. Com isto, defina:

$$\|S\|_U := \max_{c \in U} |S(c)|, \quad E(n, U) := \sum_{S \text{ } n\text{-singular}} \|S\|_U.$$

**Proposição 6.2.6.** *Seja  $\theta \in (0, 1/2)$ . Se  $M$  é grande o suficiente, então  $E(n, U) \leq 2^{-\theta n}$ .*

**Observação 6.2.1.** *A prova desta proposição usa as mesmas ideias utilizadas na seção anterior, por isso é importante tê-las bem compreendidas. Para  $2 \leq n \leq M - 2$ , só existe um intervalo  $n$ -singular e temos pela Prop. 5.2.9, parte (1), que  $E(n, U) \leq 4 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{M-2}}$ .*

*Demonstração.* Podemos assumir  $n \geq M + 3$ , pois para  $n < M + 3$  o número de intervalos  $n$ -singulares é limitado e cada um deles tem tamanho  $\leq 4 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{M-2}}$ .

Dividimos, assim como na seção 5, em intervalos  $n$ -singulares centrais, periféricos e laterais. Denotamos:

$$E_c(n, U) := \sum_{S \text{ } n\text{-singular central}} \|S\|_U$$

e da mesma forma,  $E_p(n, U)$  e  $E_\ell(n, k, U)$  para os periféricos e laterais, sendo que aqui  $k$  varia de 1 até o maior inteiro tal que  $n \geq N_k + 3$ .

Utilizando exatamente os mesmos argumentos da Prop. 5.2.4, obtemos:

$$E_p(n, U) \leq C 2^{-M} E(n - M - 1, U).$$

Da mesma forma às Proposições 5.2.7 e 5.2.8

$$E_\ell(n, k, U) \leq C 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_k - 3, U).$$

para um level  $k$  estacionário,

$$E_\ell(n, k, U) \leq C 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_{k+1} - 1, U).$$

para um level  $k$  não estacionário sendo  $J(k)$  um intervalo regular simples, e

$$E_\ell(n, k, U) \leq C \text{ord}(J(k)) 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k} E(n - N_{k+1} - 1, U).$$

para um level  $k$  não estacionário e  $J(k)$  qualquer intervalo regular.

Para os intervalos  $n$ -singulares centrais, o Corolário 5.2.1 nos dá que qualquer intervalo desta forma satisfaz:

$$\|S\|_U \leq 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k}.$$

A Prop. 5.2.1 nos dá uma limitação para a quantidade de tais intervalos que pode, então, ser absorvido pela constante  $C$ , nos dando:

$$E_c(n, U) \leq 2^{-1/2(N_k+M)} 2^{CM^{-1}N_k}$$

Com todas estas relações provadas, podemos então utilizar o mesmo argumento da Prop. 5.2.9 e chegamos a estimativa desta Proposição. ■

Com isto concluímos:

**Corolário 6.2.1.** *Seja  $U(K - 1) \subset (c^{(M)}, c^{(M-1)})$  um intervalo de parâmetros fortemente regulares até o level  $K - 1$ . Para  $n \in [2, N_K^\#]$ , a medida relativa dos parâmetro  $c \in U(K - 1)$  tais que  $f_c^{N_K}(0)$  pertencem a um intervalo regular  $J(K) \in \mathcal{J}(c)$  de ordem  $\leq n$  é, no mínimo,  $1 - C 2^{-\theta n}$ .*

*Em particular, a medida dos parâmetros em que  $f_c^{N_K}(0)$  não pertence a nenhum intervalo regular de ordem  $\leq m$  é, no máximo,  $C 2^{-\theta m} |U|$ .*

Por fim, podemos então mostrar a afirmação proposta para esta seção. Através de um argumento padrão de grande desvio mostraremos que existe um subconjunto relativamente grande em  $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$  formado por parâmetros fortemente regulares. Estes parâmetros são também regulares (pelo Corolário 5.2.2) e portanto admitem uma acipergódica, com expoente de Lyapunov positivo. Com isso, teremos completado a prova do Teorema de Jakobson.

**Proposição 6.2.7.** *Seja  $\theta^* \in (0, 1/2)$  uma constante. Para  $M$  suficientemente grande, a medida relativa em  $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$  do subconjunto de parâmetros fortemente regulares é, no mínimo,  $1 - 2^{-\theta^* M}$ .*

*Demonstração.* Começamos definindo, para  $c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)})$ , a sequência  $(X_k(c))_{k \geq 1}$  de valores inteiros por:

- Se  $c$  **NÃO** é fortemente regular até o level  $(k - 1)$ ,  $X_k(c) = 0$ ;
- Se  $c$  é fortemente regular até  $(k - 1)$ , mas  $f_c^{N_k}(0)$  **NÃO** pertence a nenhum intervalo regular em  $\mathcal{J}(c)$  de ordem  $\leq N_k^\#$ ,  $X_k(c) = N_k^\# + 3 (> M)$ ;
- Se  $c$  é fortemente regular até  $(k - 1)$ , e  $f_c^{N_k}(0)$  pertence a algum intervalo regular  $J(k) \in \mathcal{J}(c)$  de ordem  $\leq N_k^\#$ ,  $X_k(c) = \text{ord}(J(k))$  é a ordem deste intervalo.

Perceba que para  $c$  fortemente regular até o level  $K \geq 0$  vale que  $N_{K+1} = M + \sum_{k=1}^K X_k$ . Por outro lado, se  $c$  é fortemente regular até  $(K - 1)$ , mas não até  $K$ , teremos:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ X_k > M}}^K X_k(c) > 2^{-\sqrt{M}} \sum_{k=1}^K X_k(c),$$

além disto, como a ordem de qualquer intervalo regular é maior que 1, temos  $\sum_{k=1}^K X_k(c) \geq 2K$ .

Defina para cada  $c$ , as sequências  $Y_k(c) := \mathbf{1}_{\{X_k > M\}} X_k(c)$ , e  $S_k(c) := \sum_{j=1}^k Y_j(c)$ . Perceba que dado  $K \geq 1$ , se  $c$  não é fortemente regular até o level  $K$ , então  $S_K(c) \geq 2^{1-\sqrt{M}} K$ , logo limitaremos a medida do conjunto  $\{c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)}) \mid S_K(c) \geq 2^{1-\sqrt{M}} K\}$ .

Sejam  $0 < \bar{\theta} < \theta < 1/2$  constantes tais que  $\theta - \bar{\theta} > \theta^*$  e  $M$  suficientemente grande tal que o Corolário 6.2.1 seja válido. Defina:

$$I(K) := \int_{c^{(M)}}^{c^{(M-1)}} 2^{\bar{\theta} S_K(c)} dc$$

Temos dois casos:

- Em um intervalo  $V$  de parâmetros que **NÃO** são fortemente regulares até  $(K - 1)$ , temos que  $X_K(c) = Y_K(c) = 0$ , portanto:

$$\int_V 2^{\bar{\theta} S_K(c)} dc = \int_V 2^{\bar{\theta} S_{K-1}(c)} dc.$$

- Em um intervalo  $U$  de parâmetros fortemente regulares até o level  $(K - 1)$ , dado  $c \in U$  se  $f_c^{N_K}(0)$  está em um intervalo regular simples  $Y_K(c) = 0$ ; caso contrário  $M \leq Y_K(c) \leq N_K^\# + 3$ . Assim,

$$\int_U 2^{\bar{\theta}S_K(c)} dc \leq |U| + \sum_{m>M} 2^{\bar{\theta}m} \int_U \mathbf{1}_{\{X_K=m\}} dc$$

Pelo Corolário 6.2.1  $\int_U \mathbf{1}_{\{X_K=m\}} dc \leq C2^{-\theta(m-1)}$ , logo alterando a constante  $C$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_U 2^{\bar{\theta}Y_K(c)} dc &\leq \left(1 + C \sum_{m>M} 2^{(\bar{\theta}-\theta)m}\right) |U| \\ &\leq \left(1 + C(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M}\right) |U|. \end{aligned}$$

Dessa forma, como  $S_{K-1}$  é constante em  $U$ , concluímos:

$$\int_U 2^{\bar{\theta}S_K(c)} dc \leq \left(1 + C(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M}\right) \int_U 2^{\bar{\theta}S_{K-1}(c)} dc.$$

Concluímos:

$$I(K) \leq \left(1 + C(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M}\right)^K (c^{(M-1)} - c^{(M)}).$$

Segue, pela Desigualdade de Markov:

$$\frac{\text{Leb}\{c \in (c^{(M)}, c^{(M-1)}) \mid S_K(c) \geq 2^{1-\sqrt{M}}\}}{c^{(M-1)} - c^{(M)}} \leq \mu_K,$$

em que

$$\mu_K := \frac{\left(1 + C(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M}\right)^K - 1}{2^{\bar{\theta}2^{1-\sqrt{M}}K} - 1}.$$

Portanto, a medida relativa do complementar do conjunto de parâmetros fortemente regulares em  $(c^{(M)}, c^{(M-1)})$  está limitada pela série  $\sum_{K \geq 1} \mu_K$ . Precisamos então limitá-la, para isto observe que os termos  $\mu_K$  satisfazem, para  $M$  grande suficiente:

- Para  $K \leq \bar{\theta}^{-1} 2^{\sqrt{M}}$ :

$$\mu_K \leq C\bar{\theta}^{-1}(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M + \sqrt{M}},$$

pois tanto o numerador quanto o denominador de  $\mu_K$  são controlados para estes valores por funções de crescimento linear com relação a  $K$ .

A soma de todos estes termos será menor que  $C\bar{\theta}^{-2}(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M + 2\sqrt{M}}$ . Pela condição  $\theta^* < \theta - \bar{\theta}$ , tudo será menor que  $\frac{1}{3} 2^{-\theta^* M}$  para  $M$  suficientemente grande.

- Para  $\bar{\theta}^{-1} 2^{\sqrt{M}} \leq K \leq (\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M}$ :

$$\mu_K \leq CK(\theta - \bar{\theta})^{-1} 2^{(\bar{\theta}-\theta)M} 2^{-\bar{\theta}2^{1-\sqrt{M}}K},$$

pois o numerador continua com crescimento linear, enquanto que o denominador cresce exponencialmente em relação a  $K$ .

Para limitar estes termos os agruparemos, para cada  $j \geq 1$ , tome  $j\bar{\theta}^{-1}2^{\sqrt{M}} \leq K \leq (j+1)\bar{\theta}^{-1}2^{\sqrt{M}}$ . A soma de cada um destes agrupamentos será menor que:

$$Cj2^{-2j}\bar{\theta}^{-2}(\theta - \bar{\theta})^{-1}2^{(\bar{\theta}-\theta)M+2\sqrt{M}}.$$

E portanto, a soma de todos os termos deste item será menor que:

$$C\bar{\theta}^{-2}(\theta - \bar{\theta})^{-1}2^{(\bar{\theta}-\theta)M+2\sqrt{M}} \sum_{j \geq 1} j2^{-2j}.$$

Isto é menor que  $\frac{1}{3}2^{-\theta^*M}$  para M suficientemente grande.

- Para  $K \geq (\theta - \bar{\theta})^{-1}2^{(\bar{\theta}-\theta)M}$ :

$$\mu_K \leq C\rho^K, \quad \rho := \left(1 + C(\theta - \bar{\theta})^{-1}2^{(\bar{\theta}-\theta)M}\right) 2^{-\bar{\theta}2^{1-\sqrt{M}}},$$

pois tanto numerador quanto denominador crescem exponencialmente em relação a  $K$ . A soma destes termos é menor que

$$C\rho^{(\theta-\bar{\theta})^{-1}2^{(\bar{\theta}-\theta)M}}(1-\rho)^{-1},$$

observe que  $1 - \rho \approx \bar{\theta}2^{-\sqrt{M}}$ , logo toda esta soma será menor que  $2^{2^{-\theta^*M}} \leq \frac{1}{3}2^{-\theta^*M}$  para M suficientemente grande.

Concluimos então que a série  $\sum_{K \geq 1} \mu_K \leq 2^{-\theta^*M}$ . Com isso, o Teorema de Jakobson está provado. ■

## Capítulo 7

# Apêndice: Teorema do folkore e acips para mapas expansores

Consideremos um mapa do intervalo  $f : E = [0, 1] \rightarrow E$  classe  $C^2$  e suponhamos que existe uma partição  $\mathcal{P}_0 = \{E_j\}_{j \in J_0}$  de  $E$  em intervalos com  $J_0$  finito ou enumerável, e tal que  $f : E_j \rightarrow E$  é um mergulho. Para  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{P}_0$  induz uma partição  $\mathcal{P}_n = \{f^n\}_{n \in J_n}$  onde para cada  $j \in J_n$ ,  $f^n : E_j \rightarrow E$  é um mergulho.

**Teorema 7.0.1.** *Suponha que existe  $M > 0$  tal que para todo  $n \geq 0, j \in J_n$  temos*

$$x, y \in E_j \Rightarrow \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \leq M.$$

Então existe  $\mu$  acip para  $f$ .

Começaremos fazendo algumas considerações gerais. Seja  $g : I \rightarrow g(I)$  um mergulho de um intervalo compacto tal que

$$x, y \in I \Rightarrow \frac{g'(x)}{g'(y)} \leq M.$$

Pelo TVM,  $\lambda(g(I)) = |g'(x_0)| \cdot \lambda(I)$  para algum  $x_0 \in I^\circ$ , e portanto

$$x \in I \Rightarrow \frac{1}{M} \frac{\lambda(I)}{\lambda(g(I))} \leq |g'(x)| \leq M \frac{\lambda(I)}{\lambda(g(I))}.$$

Se  $A \subset I$  é mensurável temos pelo teorema de mudança de variáveis que  $\lambda(g(A)) = \int_A |g'(x)| dx$ , o que junto às desigualdades anteriores implica

$$\frac{1}{M} \frac{\lambda(I)}{\lambda(g(I))} \leq \frac{\lambda(A)}{\lambda(g(A))} \leq M \frac{\lambda(I)}{\lambda(g(I))}. \quad (7.1)$$

*Demonstração do Teorema 7.0.1.* Fixamos  $n \in \mathbb{N}, j \in J_n$  e aplicamos à discussão anterior com  $I = E_j, g = f^n$ . Dado  $B \subset E$  mensurável, consideramos  $A = f^{-n}(B) \cap I$  e usamos (7.1) para obter

$$\frac{1}{M} \lambda(I) \leq \frac{\lambda(f^{-n}(B) \cap I)}{\lambda(B)} \leq M \lambda(I).$$

Como  $\lambda(f^{-n}B) = \sum_{j \in J_n} \lambda(f^{-n}(B) \cap E_j)$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \lambda(f^{-n}B) &= \sum_{j \in J_n} \lambda(f^{-n}(B) \cap E_j) \leq M\lambda(B) \sum_{j \in J_n} \lambda(E_j) = M\lambda(B) \\ \lambda(f^{-n}(B)) &\geq \frac{1}{M}\lambda(B). \end{aligned}$$

Isto é, para todo  $B \subset E$  mensurável,

$$\frac{1}{M}\lambda(B) \leq \lambda(f^{-n}(B)) \leq M\lambda(B). \quad (7.2)$$

Para  $k \geq 0$  consideramos a probabilidade  $\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f_*^i \lambda$ : por (7.2) temos que se  $B \subset E$  é mensurável,

$$\frac{1}{M}\mu_k(B) \leq \mu_k(f^{-n}(B)) \leq M\mu_k(B). \quad (7.3)$$

Seja  $\mu$  qualquer ponto de acumulação de  $(\mu_k)_k$ :  $\mu$  é  $f$ -invariante e satisfaz também as desigualdades (7.3), portanto é equivalente à medida de Lebesgue. Isto termina a prova do teorema. ■

Vamos supor agora que as partições  $\mathcal{P}_n$  satisfazem  $\sup\{\text{diam}(E_j) : j \in J_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Isto implica em particular que estas geram a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue em  $E$ , é dizer, dado  $B$  (Lebesgue) mensurável e  $\epsilon > 0$  existe  $n$  e  $E_j \in \mathcal{P}_n$  tais que  $\lambda(B \triangle E_j) \leq \epsilon$ .

**Proposição 7.0.1.** *A medida  $\mu$  do teorema 7.0.1 é ergódica.*

*Demonstração.* Seja  $B \subset E$   $f$ -invariante de medida positiva. Para uma partição  $\mathcal{Q}$  de  $E$  e  $x \in E$  denotamos  $\mathcal{Q}(x)$  o átomo de  $\mathcal{Q}$  que contém  $x$  (observe que esta noção está bem definida salvo talvez em um conjunto de medida  $\lambda$  nula). Pelo Teorema de Densidade de Lebesgue e nossa hipótese nas partições  $\mathcal{P}_n$  temos:

$$\lambda - q.t.p.(x) \quad \lim_n \frac{\lambda(B \cap \mathcal{P}(x))}{\mathcal{P}(x)} = \mathbb{1}_B(x),$$

e portanto dado  $\epsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}, j \in J_n$  tal que

$$\frac{\lambda(E_j \setminus B)}{\lambda(E_j)} < \epsilon.$$

Aplicamos agora (7.1) com  $I = E_j, g = f^n$ , utilizando que  $B$  é  $f$  invariante:

$$\lambda(E \setminus B) = \frac{\lambda(E \setminus B)}{\lambda(E)} = \frac{\lambda(f^n(E_j \setminus B))}{\lambda(f^n(E_j))} \leq M \frac{\lambda(E_j \setminus B)}{\lambda(E_j)} < M\epsilon.$$

Isto implica que  $\lambda(E \setminus B) = 0$ , e portanto  $\mu(E \setminus B) = 0, \mu(B) = 1$ . ■

Discutiremos agora um caso onde podemos verificar as hipóteses do teorema 7.0.1.

### 7.0.1 Distorção

**Definição 7.0.1.** A distorção de um mergulho  $g : I \rightarrow g(I)$  em  $x \in I$  é

$$d_g(x) := \frac{u'_g(x)}{g'(x)} = \frac{g''(x)}{(g'(x))^2}$$

onde

$$u_g(x) = \log |g'(x)|.$$

Verifica-se diretamente que se  $f, g$  são mergulhos do  $I$  então

$$d_{f \circ g}(x) = d_{f \circ g} + \frac{1}{f' \circ g} d_g \quad (7.4)$$

e portanto

$$\forall n \geq 0, \quad d_{f^n} = \sum_{k=0}^{n-1} d_{f \circ f^{n-k-1}} \cdot \frac{1}{(f^k)' \circ f^{n-k}}. \quad (7.5)$$

**Observação 7.0.1.** Alguns autores definem  $d_g$  como igual  $\frac{|g''|}{(g')^2}$ .

**Proposição 7.0.2.** Seja  $f : E \rightarrow E$  classe  $C^2$  como no teorema 7.0.1, e suponhamos que existem  $\lambda > 1, L > 0$  tais que

- $|f'| > \lambda$ .
- $|d_f| < L$ .

Então para todo  $n \in \mathbb{N}, j \in J_n$  temos

$$x, y \in E_j \Rightarrow \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \leq \exp\left(\frac{L\lambda}{1-\lambda}\right).$$

*Demonstração.* Por (7.5),  $|d_{f^n}| \leq \frac{L\lambda}{1-\lambda}$ . Notar que se  $g : I \rightarrow g(I)$  é um mergulho, então para todo  $x, y \in I$

$$|u_g(x) - u_g(y)| = \left| \int_x^y u'_g(t) dt \right| \leq \sup_I |d_g| \cdot \left| \int_x^y g'(t) dt \right| \leq \sup_I |d_g| \cdot \lambda(I) \leq \sup_I |d_g|.$$

Aplicando o anterior com  $g = f^n$  e notando que  $(f^n)'$  não troca de sinal em  $E_j$ , temos o resultado. ■

Observe que se  $|f'| > \lambda > 1$ ,  $\sup\{\text{diam}(E_j) : j \in J_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Combinando o teorema 7.0.1 e as Proposições 7.0.1, 7.0.2 temos o seguinte.

**Teorema 7.0.2** (Folklore - Adler [3]). *Seja  $f : E \rightarrow E$  um mapa classe  $C^2$  tal que existe uma partição  $\mathcal{P}_0 = \{E_j\}_{j \in J_0}$  de  $E$  com  $J_0$  finito ou enumerável tais que:*

1.  $f : E_j \rightarrow E$  é um mergulho  $C^2$ .

2.  $|f'| > \lambda > 1$  para algum  $\lambda$ .

3.  $|d_f| < \infty$ .

*Então existe uma  $\mu$  acip para  $f$ ; de fato  $\mu$  é equivalente a  $\lambda$  e o sistema  $(f, \mu)$  é ergódico (portanto  $\mu$  é a única acip de  $f$ ).*

O teorema anterior é válido baixo condições mais gerais (veja por exemplo [4],[5]).

# Referências Bibliográficas

- [1] J.-C. Yoccoz, “A proof of jakobson’s theorem,” *Asterisque*, vol. 15, pp. 1–34, 2015.
- [2] M. Lyubich, “Dynamics of quadratic polynomials, i-ii,” *Acta Mathematica*, vol. 178, no. 2, pp. 185–297, 1997.
- [3] R. Adler, “F-expansions revisited,” in *Recent Advances in Topological Dynamics* (A. Beck, ed.).
- [4] A. Lasota and J. A. Yorke, “On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 186, pp. 481–488, 1973.
- [5] R. Bowen, “Invariant measures for Markov maps of the interval,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 69, no. 1, pp. 1–14, 1979.